

# Billards in $n$ -dimensionalen Ellipsoiden

Gautam Dilip Banhatti

Bachelorarbeit  
1-Fach-Bachelor Mathematik  
WWU Münster

# Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit „Billards in  $n$ -dimensionalen Ellipsoiden“ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen, sowie Rücksprachen mit meinem Betreuer Prof. Peter Albers, benutzt worden sind, und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

Datum

---

Unterschrift

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

Datum

---

Unterschrift

# Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Jesus Christus bedanken, der sich für mich aufgeopfert hat, um mich zu retten, und der mich in allem begleitet und mir hilft, so auch beim Verfassen dieser Bachelorarbeit. Ich bedanke mich auch bei meiner Familie, besonders bei meiner Mutter Radha Banhatti, die mir motivierend und unterstützend zur Seite standen. Auch bei meinem Betreuer Peter Albers möchte ich mich bedanken, der sich immer Zeit für meine Fragen genommen hat, auch wenn es manchmal mehrere Stunden dauerte.

Ich bedanke mich auch bei dem Verfasser des Buchs „Geometry and Billiards“ Serge Tabachnikov, auf der diese Bachelorarbeit basiert. Auch möchte ich mich bei der Universität Augsburg für die Organisation und Durchführung des Blockseminars „Mathematik des Billards“ bedanken, insbesondere bei den Organisatoren Kai Cieliebak, Urs Frauenfelder und Otto van Koert. Dort habe ich das Thema dieser Arbeit kennengelernt. Auch möchte ich mich bei Michael Herrmann bedanken, durch den ich das Konzept des mathematischen Billards kennengelernt habe.

Einen allgemeinen Dank möchte ich auch der Universität Münster aussprechen, die mir das Studium hier ermöglichen.

# Inhaltsverzeichnis

1	Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$	5
2	Konfokale Quadriken	7
3	Schnitt einer zentralen Quadrik mit einer Hyperebene	12
4	Polare Dualität	18
5	Geodäten auf einem Ellipsoiden	27

# Einleitung

Eine *Quadrik* ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in einer oder mehreren Variablen. Ein *n-dimensionaler Ellipsoid* ist eine spezielle Quadrik, welche durch

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1 \right\}$$

gegeben ist, wobei  $a_1, \dots, a_n$  positive reelle Parameter sind. Der Ellipsoid ist eine  $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , und ist diffeomorph zur Einheitskugel  $S^{n-1}$ . Wählt man als Parameter  $a_1 = \dots = a_n = 1$ , so ergibt sich gerade die Einheitskugel.

In der vorliegenden Arbeit soll es um ein Theorem gehen, welches das Langzeitverhalten von Billardtrajektorien im Inneren eines Ellipsoids beschreibt, bei denen die Parameter  $a_1, \dots, a_n$  voneinander verschieden sind. Bevor dieses Theorem formuliert werden kann, muss noch der Begriff einer *konfokalen Quadrikenchar* eingeführt werden: Dies ist eine Familie von Quadriken, welche durch die Gleichung

$$Q_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n + \lambda} = 1 \right\}$$

beschrieben werden, wobei  $\lambda \in U := \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$  ist, und die Parameter  $a_1, \dots, a_n$  positiv und reell sind. Insbesondere ist  $Q_0$  ein Ellipsoid.

Unter mathematischem Billard versteht man folgendes System: In einer nichtleeren, offenen und zusammenhängenden Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit glattem Rand wähle man eine Startposition  $x_0 \in \bar{\Omega}$  und eine Startgeschwindigkeit  $v_0 \in S^{n-1}$ . Von Interesse ist nun die Trajektorie  $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \bar{\Omega}, t \mapsto x(t)$  eines Massenpunktes mit  $x(0) = x_0$  und  $x'(0) = v_0$ , wobei  $t$  die Zeit beschreibt, und die Trajektorie sich nach folgenden Gesetzmäßigkeiten bestimmen lässt:

- Für  $x(t) \in \Omega$  bewegt sich der Punkt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter.
- Falls  $x(t) \in \partial\Omega$ , so findet ein elastischer Stoß am Rand  $\partial\Omega$  statt: Der Anteil der Geschwindigkeit orthogonal zur Randfläche  $\partial\Omega$  ändert sein Vorzeichen, während der tangentielle Anteil gleich bleibt. Der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich dabei nicht (Siehe Abb.1).

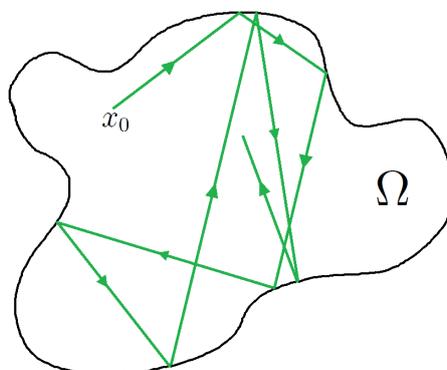


Abbildung 1: Mathematisches Billard in einem 2-dimensionalen Gebiet

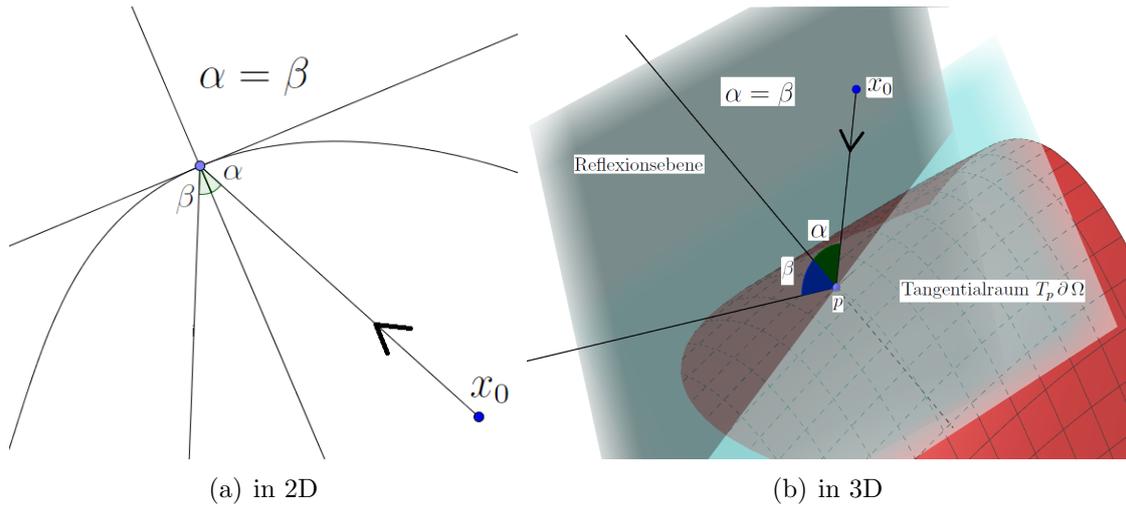


Abbildung 2: Reflexionsgesetz in zwei- und dreidimensionalen Räumen

Die Reflexion am Rand kann im zweidimensionalen Raum mit der Gesetzmäßigkeit „Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel“ beschrieben werden. Im dreidimensionalen Raum gilt ebenfalls die Gesetzmäßigkeit „Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel“, wobei sich der Massenpunkt vor und nach der Reflexion in derselben Reflexionsebene bewegt, welche orthogonal auf dem Tangentialraum der Randfläche am Reflexionspunkt ist. Der Einfalls- und Ausfallwinkel werden dann in dieser Ebene betrachtet (siehe Abb.2).

Im Zusammenhang mit dem mathematischen Billard betrachtet man auch die Billardkugelabbildung

$$T : \partial \Omega \times S^{n-1} \longrightarrow \partial \Omega \times S^{n-1},$$

welches das Tupel  $(x_0, v_0)$  aus Anfangspunkt auf dem Rand von  $\Omega$  und Startgeschwindigkeit auf das Tupel  $(x_1, v_1)$  schickt, wobei  $x_1$  den nächsten Stoßpunkt mit dem Rand beschreibt, und  $v_1$  die Geschwindigkeit nach diesem Stoß angibt. Die Menge  $M := \partial \Omega \times S^{n-1}$  kann als Phasenraum des mathematischen Billard auf  $\Omega$  bezeichnet werden, und die Billardtrajektorie mit Startwerten  $(x_0, v_0) \in M$  kann dann durch die Folge  $(x_n, v_n) := T^n(x_0, v_0)$  von Punkten im Phasenraum beschrieben werden (mit  $n \in \mathbb{N}$ ). Um das Verhalten des Billards zu verstehen ist es daher nützlich, die von der Billardkugelabbildung  $T : M \longrightarrow M$  erzeugte diskrete Dynamik zu betrachten.

Das Theorem, welches in dieser Arbeit behandelt wird, ist aus [6] entnommen und lässt sich etwa so paraphrasieren:

**Theorem** (Billard in Ellipsoiden). *Betrachte eine konfokale Quadrikenchar  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in U}$  mit voneinander verschiedenen Parametern  $a_1, \dots, a_n$ . Sei  $E := Q_0$ . Dann gibt es zu fast jeder Billardtrajektorie im Inneren des Ellipsoiden  $E$  genau  $n-1$  eindeutige, voneinander verschiedene Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in U$ , sodass die Billardtrajektorie tangential an  $Q_{\lambda_i}$  bleibt (für  $i = 1, \dots, n-1$ ).*

Hierbei bedeutet die Formulierung „Billardtrajektorie tangential an  $Q_{\lambda_i}$ “ dass die Geraden, die durch Verlängerung der geraden Teilabschnitte der Billardtrajektorie entstehen, tangential an der Quadrik  $Q_{\lambda_i}$  liegen.

An dieser Stelle sei erwähnt, vor welchem Hintergrund dieses Theorem in [6] behandelt wird:

Aus dem Theorem folgt die Existenz von  $n-1$  linear unabhängigen Funktionen auf

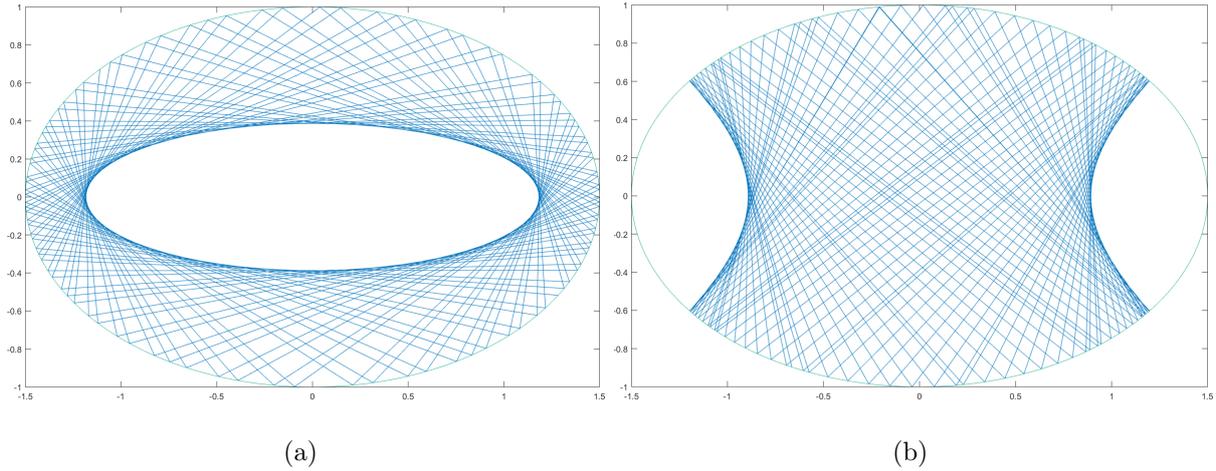


Abbildung 3: Billards im Gebiet  $\frac{4}{9}x^2 + y^2 \leq 1$  mit zwei verschiedenen Anfangswerten, jeweils 100 Reflexionen am Rand.

dem Phasenraum  $M$ , die unter der Billardkugelabbildung  $T : M \rightarrow M$  invariant sind. Da der zugehörige Phasenraum  $M$  eine  $(2n - 2)$ -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit darstellt und die Billardkugelabbildung eine symplektische Abbildung ist, folgt hieraus mithilfe des Arnold-Liouville Theorems, dass die zugehörige Billardkugelabbildung  $T$  vollständig integrierbar im Liouville'schen Sinne ist. Dies hat zur Folge, dass die Billardkugelabbildung qualitativ einfach zu beschreiben ist.

Diese weiterführenden Gedanken sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit, weshalb der Begriff der symplektischen Mannigfaltigkeit sowie das Theorem von Arnold-Liouville hier nicht genauer erläutert wird. Stattdessen geht es darum, den in [6] skizzierten Beweis genauer auszuarbeiten.

Um eine anschauliche Vorstellung des Theorems zu erhalten, bietet es sich an, die oben beschriebene Konstruktion für  $n = 2$  zu betrachten: Betrachte die Ellipse

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} = 1 \right\} \text{ mit } a_1, a_2 > 0.$$

Man beobachtet bei der numerischen Simulation des Billard im Inneren von  $E$ , dass die Trajektorie in den meisten Fällen einen Teil des Gebiets völlig freilässt, dessen Rand sich augenscheinlich durch eine Ellipse oder eine Hyperbel beschreiben lässt (siehe Abb.3). Diese Randkurve ist Element der Quadrikenfamilie

$$Q_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} = 1 \right\},$$

und die Trajektorien liegen tangential an der jeweiligen Quadrik. Aus dieser geometrischen Eigenschaft ergibt sich folgende Invariante für die Billardtrajektorien: Sei  $M$  der Phasenraum, betrachte die Funktion

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}, (x, v) \mapsto v_1^2 + \frac{(v_2 x_1 - v_1 x_2)^2}{a_1 - a_2}.$$

Dann ist  $F$  entlang jeder Billardtrajektorie konstant, d.h. die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto F(x(t), x'(t))$$

ist konstant. An den Reflexionspunkten ist  $x'(t)$  nicht definiert, hier kann aber entweder die Geschwindigkeit vor oder nach der Reflexion verwendet werden.

Die invariante Funktion ergibt sich wie folgt: Die Bedingung, dass für  $(x, v) \in M$  die Gerade  $g = x + \mathbb{R} \cdot v$  tangential an einer Quadrik  $Q_\lambda$  liegt, lässt sich so formulieren, dass die quadratische Gleichung

$$\frac{(x_1 + \mu v_1)^2}{a_1 + \lambda} + \frac{(x_2 + \mu v_2)^2}{a_2 + \lambda} - 1 = 0$$

eine doppelte Nullstelle in  $\mu$  hat. Somit verschwindet die Diskriminante dieser Gleichung, woraus sich die Bedingung

$$\frac{\lambda + a_1}{a_1 - a_2} = v_1^2 + \frac{(v_2 x_1 - v_1 x_2)^2}{a_1 - a_2} = F(x, v)$$

ergibt. Da aber  $a_1$  und  $a_2$  konstant sind, und jeder Abschnitt einer Billardtrajektorie an derselben Quadrik  $Q_\lambda$  tangential ist, ergibt sich die oben angegebene Invariante entlang der Trajektorie.

Auf ähnliche Weise ergeben sich im  $n$ -dimensionalen Fall aus der geometrischen Bedingung die  $n - 1$  invarianten Funktionen.

Der Beweis des Theorems über Billard im Ellipsoiden erfolgt in [6] in vier Schritten, welche wie folgt zusammengefasst werden können:

Zunächst wird bewiesen, dass zu einer generischen konfokalen Quadriken­schar für einen generischen Punkt genau  $n$  verschiedene Quadriken der Schar existieren, welche den Punkt enthalten.

Als Nächstes wird gezeigt, dass es zu einer generischen konfokalen Quadriken­schar und einer generischen Gerade genau  $n - 1$  verschiedene Quadriken der Schar gibt, an denen die Gerade tangential liegt.

Anschließend wird diese letzte Aussage auf die Tangenten einer Geodäten auf einem Ellipsoiden  $E$  bezogen: Betrachtet man eine generische konfokale Schar  $\{Q_\lambda\}$  sodass  $E = Q_0$  ist, und wählt man eine generische Geodäte auf  $E$ , so gibt es für jede Tangente der Geodäten  $n - 2$  andere Quadriken der Schar, an denen diese Tangente tangential liegt. Nun wird zusätzlich begründet, warum diese  $n - 2$  anderen Quadriken entlang der Geodäten gleich bleiben.

Im letzten Schritt werden Geodäten und Billardtrajektorien wie folgt in Zusammenhang gebracht: Betrachte den Ellipsoiden

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1 \right\}.$$

Bei dem Grenzübergang  $a_n \rightarrow 0$  wird der Ellipsoid „entlang der  $x_n$ -Achse plattgedrückt“, und die Geodäten auf  $E$  „konvergieren gegen die Billardtrajektorien“ im Ellipsoiden

$$\tilde{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}} = 1 \right\}.$$

Außerdem gehen bei diesem Grenzübergang die zu  $E$  konfokalen Quadriken in die zu  $\tilde{E}$  konfokalen Quadriken über, sodass die analoge Aussage über Billardtrajektorien formuliert werden kann. Dieser letzte Beweisschritt wird in [6] nur anschaulich skizziert, und es wird nicht auf den genauen Beweis eingegangen.

In dieser Arbeit werden die ersten drei Aussagen als Theoreme formuliert und bewiesen. Dabei werden die in [6] als „generisch“ formulierten Voraussetzungen präzisiert.

# 1 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Als Grundlage für alle weiteren Betrachtungen werden einige Definitionen und Sätze zu Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  benötigt. Diese sind, bis auf Definition 1.3 und Lemma 1.4, aus [5, Kapitel 1] entnommen.

**Satz 1.1** (von der impliziten Funktion). *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  offen, sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  glatt, und sei  $(x_0, y_0) \in \Omega$  sodass*

$$f(x_0, y_0) = 0, \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0.$$

*Dann existieren offene Mengen  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^l$ , sodass  $(x_0, y_0) \in V \times W \subseteq \Omega$ , und eine glatte Abbildung  $g : V \rightarrow W$ , sodass für alle  $(x, y) \in V \times W$  gilt:*

$$f(x, y) = 0 \iff g(x) = y.$$

*Insbesondere gilt:  $f(x_0) = y_0$ .*

**Definition 1.2** (Glatte Abbildungen zwischen Mengen). *Seien  $k, l \in \mathbb{N}$ , seien  $X \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^l$  beliebige Teilmengen. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt glatt, falls es zu jedem  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  gibt, und eine glatte Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  sodass  $F(x) = f(x)$  für alle  $x \in U \cap X$ . Die Abbildung  $f$  wird ein Diffeomorphismus genannt, falls  $f$  bijektiv ist, und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  glatt sind. Die Mengen  $X$  und  $Y$  heißen diffeomorph (zueinander), falls ein Diffeomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  existiert.*

**Bemerkung.** *Die Verknüpfung von Diffeomorphismen ist wieder ein Diffeomorphismus. Somit ist Diffeomorphie eine Äquivalenzrelation auf  $\{X \mid X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ .*

**Definition 1.3** (lokaler Diffeomorphismus). *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen Mengen  $X \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ . Die Abbildung  $f$  wird als lokaler Diffeomorphismus bezeichnet, falls es zu jedem  $x \in X$  eine  $X$ -offene Umgebung  $U$  von  $x$  gibt, sodass  $f(U)$  eine  $Y$ -offene Menge ist, und die Abbildung  $U \rightarrow f(U), z \mapsto f(z)$  ein Diffeomorphismus ist.*

**Lemma 1.4.** *Seien  $X, Y, Z$  Teilmengen von (möglicherweise verschiedenen) reellen Vektorräumen, und seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow Z$  lokale Diffeomorphismen, wobei  $f$  surjektiv sei. Sei ferner  $h : Y \rightarrow Z$  sodass  $h \circ f = g$ . Dann ist auch  $h$  ein lokaler Diffeomorphismus.*

*Beweis.* Sei  $y \in Y$ , wähle  $x \in X$  sodass  $f(x) = y$ . Wähle Umgebungen  $U_f, U_g \subseteq X$  von  $x$  sodass die Abbildungen  $U_f \rightarrow f(U_f), z \mapsto f(z)$  und  $U_g \rightarrow g(U_g), z \mapsto g(z)$  Diffeomorphismen sind. Setze  $U := U_f \cap U_g$ , dann ist die zusammengesetzte Abbildung  $f(U) \rightarrow g(U), z \mapsto g \circ f^{-1}(z) = h(z)$  ein Diffeomorphismus. Da  $y = f(x) \in f(U)$  ist, folgt hieraus die Aussage.  $\square$

**Definition 1.5** (Untermannigfaltigkeit). *Seien  $k, m \in \mathbb{N}$ . Eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  heißt (glatte)  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^k$ , falls zu jedem Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  und eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  existiert, sodass  $U \cap M$  und  $\Omega$  diffeomorph sind. Ist  $m = k - 1$ , so wird  $M$  auch als Hyperfläche bezeichnet.*

**Bemerkung.** *Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist  $m \leq k$ . Im Fall  $m = k$  ist  $M$  eine offene Menge.*

**Definition und Satz 1.6** (Tangentialraum). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und sei  $p \in M$ . Dann ist

$$T_p M := \{\gamma'(0) \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ ist glatt mit } \gamma(0) = p\}$$

der Tangentialraum von  $M$  an der Stelle  $p$ . Dieser ist ein  $m$ -dimensionaler linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^k$ .

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  eine offene Umgebung von  $p$ , sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  eine offene Menge und sei  $\psi : \Omega \rightarrow U \cap M$  ein Diffeomorphismus. Dann ist  $T_p M = \text{im}(D\psi(\psi^{-1}(p)))$ .

**Definition und Satz 1.7** (Regulärer Wert). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  glatt. Ein Element  $c \in \mathbb{R}^l$  heißt regulärer Wert von  $f$ , falls für alle  $p \in U$  mit  $f(p) = c$  gilt: Die Ableitung  $Df(p) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  ist surjektiv. In diesem Fall gilt: Das Urbild  $M := f^{-1}(c)$  des regulären Wertes ist eine  $(k-l)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^k$ , und für  $p \in M$  ist  $T_p M = \ker(Df(p))$ .

**Korollar 1.8.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  eine offene Menge und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, sei  $c \in \mathbb{R}$ . Falls für alle  $p \in U$  mit  $f(p) = c$  gilt:  $\nabla f(p) \neq 0$ , so ist  $M := f^{-1}(c)$  eine Hyperfläche, und für alle  $p \in M$  ist  $T_p M = \ker(\langle \nabla f(p), \cdot \rangle)$ . Somit ist  $\nabla f(p)$  Normalenvektor von  $M$  an der Stelle  $p$ .

**Definition und Satz 1.9** (Ableitung). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit,  $N \subseteq \mathbb{R}^l$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow N$  glatt, sei  $p \in M$ . Dann existiert eine lineare Abbildung  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , sodass gilt: Für jede glatte Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ , wo  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  eine offene Umgebung von  $p$  ist und  $F(x) = f(x)$  für alle  $x \in U \cap M$  ist, gilt  $DF(p)(v) = Df(p)(v)$  für jedes  $v \in T_p M$ . Diese Abbildung  $Df(p)$  wird als Ableitung von  $f$  an der Stelle  $p$  bezeichnet. Falls  $f$  ein Diffeomorphismus ist, ist für jedes  $p \in M$  die Abbildung  $Df(p)$  ein Isomorphismus.

**Definition und Satz 1.10** (Regulärer Wert). Für eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen Untermannigfaltigkeiten  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^l$  heißt  $q \in N$  ein regulärer Wert von  $f$ , falls für jedes  $p \in f^{-1}(q)$  die Ableitung  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$  surjektiv ist. In diesem Fall ist  $P := f^{-1}(q)$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $\dim M - \dim N$ , und der Tangentialraum am Punkt  $p \in P$  ist gegeben durch  $T_p P = \ker Df(p)$ .

**Satz 1.11** (von der Umkehrabbildung für Mannigfaltigkeiten). Sei  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung zwischen Untermannigfaltigkeiten  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^l$  gleicher Dimension. Sei  $p \in M$ , sodass  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  ein Isomorphismus ist. Dann gibt es eine  $M$ -offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $p$  sodass  $V := f(U) \subseteq N$  eine  $N$ -offene Menge ist, und die Abbildung  $f|_U : U \rightarrow V$  (mit verkleinertem Bildbereich) ein Diffeomorphismus ist.

## 2 Konfokale Quadriken

**Definition 2.1.** Eine Quadrik ist eine Nullstellenmenge der Form  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) = 0\}$ , wobei  $q$  ein reelles quadratisches Polynom in  $n$  Variablen ist.

Für die weiteren Überlegungen sind nur Quadriken der Form

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1 \right\} \text{ mit } a_1, \dots, a_n \neq 0$$

relevant. Da jedoch das Verhalten der Billardtrajektorien sich bei Drehung, Spiegelung und Translation des Systems nicht ändert, gelten die Aussagen über das Billard auch für Quadriken, die durch eine längen- und winkelerhaltende Abbildung in eine Quadrik obiger Form gebracht werden können. Eine solche Abbildung hat stets die Form  $x \mapsto Sx + t$  mit  $S \in O(n, \mathbb{R})$  und  $t \in \mathbb{R}^n$ . Die folgenden Sätze geben Aufschluss darüber, wann eine Quadrik sich in die Form von  $Q$  bringen lässt.

**Satz 2.2.** Jedes reelle quadratische Polynom  $q$  lässt sich in der Form

$$q(x) = x^T A x + \langle b, x \rangle + c$$

mit  $0 \neq A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$  schreiben. Dabei sind  $A$ ,  $b$  und  $c$  durch  $q$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Zur Existenz: Sei

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \lambda_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda.$$

Für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  setze  $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda_{ij} & \text{falls } i < j \\ \lambda_{ii} & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2} \lambda_{ji} & \text{falls } i > j \end{cases}$ , und definiere  $A := (a_{ij})$ . Sei außerdem  $b := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  und  $c := \lambda$ . Per Definition ist  $A$  symmetrisch, und die Bedingung  $A \neq 0$  folgt direkt aus der Tatsache, dass nicht alle  $\lambda_{ij}$  gleich null sein können, da sonst das Polynom  $q$  nicht quadratisch wäre. Die Gleichung  $q(x) = x^T A x + \langle b, x \rangle + c$  lässt sich leicht nachrechnen.

Zur Eindeutigkeit: Jedes Polynom  $q$  definiert eine eindeutige Abbildung

$$F_q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto q(x).$$

Denn falls  $\forall x \in \mathbb{R}^n : q(x) = \tilde{q}(x)$  für zwei verschiedene Polynome  $q$  und  $\tilde{q}$ , so wäre  $q - \tilde{q}$  die Nullabbildung, und dies ist nur möglich, falls es das Nullpolynom ist. Hieraus folgt aber die Gleichheit der Polynome  $q$  und  $\tilde{q}$ .

Es gilt  $c = F_q(0)$ ,  $b_i = DF_q(0)(e_i)$  und  $a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F_q}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ . Somit lassen sich  $A$ ,  $b$  und  $c$  auf eindeutige Weise aus der Abbildung bestimmen.  $\square$

**Satz 2.3.** Sei  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + \langle b, x \rangle + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik, wobei  $A$  symmetrisch und invertierbar sei. Dann existieren  $S \in O(n, \mathbb{R})$  und  $t \in \mathbb{R}^n$ , sodass mit  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Sx + t$  gilt:  $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n d_i x_i^2 + e = 0 \right\}$ , wobei  $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  die Eigenwerte von  $A$  sind, und  $e := c - \frac{1}{4} b^T A^{-1} b$ .

*Beweis.* Aus der linearen Algebra<sup>1</sup> ist bekannt, dass es eine Matrix  $S \in O(n, \mathbb{R})$  gibt, so dass  $SAS^T = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  mit  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  ist. Dabei sind die Diagonaleinträge von  $D$  gerade die Eigenwerte von  $A$ . Da  $A$  invertierbar ist, sind alle Diagonaleinträge in  $D$  ungleich 0. Sei nun  $f$  durch  $f(x) = Sx + \frac{1}{2}SA^{-1}b$  gegeben. Dann ist  $f$  bijektiv mit  $f^{-1}(x) = S^T x - \frac{1}{2}A^{-1}b$ , somit ist  $f(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f^{-1}(x) \in Q\}$ . Diese Bedingung lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} & f^{-1}(x) \in Q \\ \iff & (f^{-1}(x))^T A(f^{-1}(x)) + b^T \cdot f^{-1}(x) + c = 0 \\ \iff & (S^T x - \frac{1}{2}A^{-1}b)^T A(S^T x - \frac{1}{2}A^{-1}b) + b^T \cdot (S^T x - \frac{1}{2}A^{-1}b) + c = 0 \\ \iff & x^T D x - \frac{1}{2}b^T S^T x - \frac{1}{2}x^T S b + \frac{1}{4}b^T A^{-1}b + b^T S^T x - \frac{1}{2}b^T A^{-1}b + c = 0 \\ \iff & x^T D x - \frac{1}{4}b^T A^{-1}b + c = 0 \\ \iff & \sum_{i=0}^n d_i x_i^2 + e = 0. \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.4.** Ist  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + c = 0\}$ , so kann  $Q$  durch eine orthogonale Koordinatentransformation in eine Quadrik der Form  $Q \cong \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n d_i x_i^2 + c = 0\right\}$  überführt werden, wobei  $d_1, \dots, d_n$  gerade die Eigenwerte von  $A$  sind.

*Beweis.* Setzt man im Beweis von Satz 2.3  $b = 0$  ein, so ergibt sich  $f(x) = Sx$ , wobei  $S \in O(n, \mathbb{R})$  ist, und  $e = c$ . Die Abbildung  $f$  ist somit eine orthogonale Koordinatentransformation. □

**Bemerkung.** Eine orthogonale lineare Abbildung  $f(x) = Sx$  mit  $S \in O(n, \mathbb{R})$  ist bekanntlich skalarprodukterhaltend, denn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle Sx, Sy \rangle = (Sx)^T (Sy) = x^T \underbrace{(S^T S)}_{=1} y = \langle x, y \rangle.$$

**Satz 2.5.** Eine Quadrik der Form  $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n d_i x_i^2 + e = 0\right\}$  lässt sich im Fall  $d_1, \dots, d_n, e \neq 0$  auch in der Form  $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1\right\}$  schreiben. Jede solche Quadrik ist zudem eine  $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

*Beweis.* Mit  $a_i = -\frac{e}{d_i}$  ist offensichtlich  $\sum_{i=0}^n d_i x_i^2 + e = 0 \iff \sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1$ . Die Abbildung  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}$  hat an jeder Stelle  $x \in Q = F^{-1}(1)$  einen nichtverschwindenden Gradienten  $\nabla F(x) = 2\left(\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n}\right)^T$ , denn wegen  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1$  muss für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  gelten, dass  $\frac{x_i}{a_i} \neq 0$ . Somit folgt nach Korollar 1.8 die Behauptung. □

<sup>1</sup>Siehe z.B. [1], Kapitel 7.6, Theorem 6

**Definition 2.6.** Eine zentrale Quadrik ist eine Quadrik  $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \right\}$  mit  $a_1, \dots, a_n \neq 0$ . Für eine solche Quadrik sei der Typ der Quadrik die natürliche Zahl  $\text{Typ}(Q)$ , welche die Anzahl der negativen Koeffizienten der quadratischen Gleichung angibt, d.h.

$$\text{Typ}(Q) := |\{i \in \{1, \dots, n\} : a_i < 0\}|.$$

Eine zentrale Quadrik vom Typ 0 wird auch als zentraler Ellipsoid bezeichnet.

**Definition 2.7.** Sei  $Q$  eine Quadrik.  $Q$  heißt Quadrik  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  vom Typ  $k$ , falls eine Abbildung  $f : x \mapsto Sx + t$  mit  $S \in O(n, \mathbb{R}), t \in \mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $f(Q)$  eine zentrale Quadrik mit  $\text{Typ}(f(Q)) = k$  ist. Schließlich ist  $Q$  eine  $n$ -achsige Quadrik, wenn bei der zugehörigen zentralen Quadrik die Parameter  $a_1, \dots, a_n$  voneinander verschieden sind.

**Bemerkung.** Eine Quadrik vom Typ  $n$  ist die leere Menge, und eine nichtleere Quadrik  $Q$  ist genau dann beschränkt, wenn  $\text{Typ}(Q) = 0$ .

Mit Korollar 2.4 sieht man daher, dass für jede symmetrische, invertierbare Matrix  $A$  die Quadrik mit der Gleichung  $\langle Ax, x \rangle = 1$  bezüglich einer orthogonalen Basis aus Eigenvektoren zu einer zentralen Quadrik wird, und der Typ dieser Quadrik nur von den Vorzeichen der Eigenwerte von  $A$  abhängt. Die Quadrik ist zudem genau dann  $n$ -achsige, wenn es  $n$  verschiedene Eigenwerte von  $A$  gibt.

Wie aus Definition 2.7 hervorgeht, lässt sich einer Quadrik nur dann ein Typ zuordnen, wenn sie sich durch eine längen- und winkelerhaltende Abbildung in eine zentrale Quadrik überführen lässt. Bezeichne solche Quadriken als nicht-degeneriert. Für diese gilt:

**Satz 2.8.** Zwei Quadriken  $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$  gleichen Typs sind diffeomorph.

*Beweis.* Da eine Abbildung  $f : x \mapsto Sx + t$  mit  $S \in O(n, \mathbb{R}), t \in \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus ist, reicht es, die Aussage für zwei zentrale Quadriken zu beweisen.

Sei  $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \right\}$  und oBdA  $a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $x \mapsto (\sqrt{|a_1|}x_1, \dots, \sqrt{|a_n|}x_n)^T$ . Die Abbildung  $f$  ist offensichtlich ein Diffeomorphismus.

Sei ferner  $\tilde{Q}_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\sum_{i=1}^j x_i^2 + \sum_{i=j+1}^n x_i^2 = 1 \right\}$ . Dann gilt mit  $k := \text{Typ}(Q)$ , dass

$Q = f(\tilde{Q}_k)$ . Dies sieht man so:

$$f(x) \in Q \iff \sum_{i=1}^n \frac{(\sqrt{|a_i|}x_i)^2}{a_i} = 1 \iff \sum_{i=1}^n \text{sgn}(a_i) \cdot x_i^2 = 1 \iff x \in \tilde{Q}_k.$$

Da Diffeomorphie eine Äquivalenzrelation auf Mannigfaltigkeiten ist, ist die Aussage bewiesen.  $\square$

Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung dafür, wann eine Quadrik nicht-degeneriert ist.

**Satz 2.9.** Sei  $Q$  eine Quadrik gegeben durch

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + \langle b, x \rangle + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } 0 \neq A \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

Sei  $A$  invertierbar, und sei  $e := c - \frac{1}{4}b^T A^{-1}b \neq 0$ . Sei  $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  eine Diagonalgestalt von  $A$ , d.h.  $D = S^T A S$  für ein passendes  $S \in O(n, \mathbb{R})$ . Sei

$$k := |\{i \in \{1, \dots, n\} : \text{sgn}(d_i) = \text{sgn}(e)\}|.$$

Dann ist  $Q$  eine Quadrik vom Typ  $k$ . Außerdem ist  $Q$  genau dann  $n$ -achsig, wenn die Eigenwerte  $d_1, \dots, d_n$  von  $A$  alle verschieden sind.

*Beweis.* Verwende die in Satz 2.3 definierte Abbildung  $f : x \mapsto Sx + t$  mit  $S \in O(n, \mathbb{R})$ . Es ergibt sich  $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n d_i x_i^2 + e = 0 \right\}$ . Nach Voraussetzung ist  $e \neq 0$ . Außerdem ist  $D = S^T A S$  invertierbar, somit sind  $d_1, \dots, d_n \neq 0$ . Mit Satz 2.5 folgt nun, dass  $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \right\}$ , mit  $a_i := -\frac{e}{d_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Nach Voraussetzung ist dann  $\text{Typ}\{f(Q)\} = k$ . Außerdem sind die  $a_1, \dots, a_n$  genau dann alle verschieden, wenn das auch für  $d_1, \dots, d_n$  gilt.  $\square$

**Definition 2.10.** Eine konfokale Quadrikenfamilie zu den Parametern  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$  ist eine Familie von zentralen Quadriken  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}}$  mit

$$Q_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 1 \right\}.$$

Zwei zentrale Quadriken heißen konfokal, falls sie sich als Elemente derselben konfokalen Quadrikenfamilie darstellen lassen.

Das folgende Theorem besagt, dass es für eine gegebene konfokale  $n$ -achsige Quadrikenfamilie zu fast jedem Punkt  $n$  verschiedene Quadriken der Schar gibt, die diesen Punkt enthalten, und dass diese Quadriken in diesem Punkt orthogonal zueinander sind.

**Theorem 1.** Sei  $\{Q_\lambda\}$  eine konfokale Quadrikenfamilie zu den Parametern  $a_1, \dots, a_n$  mit  $0 < a_1 < \dots < a_n$ , und sei  $x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ . Dann existieren eindeutige Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$  sodass  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$  mit  $x \in Q_{\lambda_i}$  und  $\text{Typ}(Q_{\lambda_i}) = i - 1$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dabei hängen die Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  glatt von  $x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$  und den Parametern  $a_1, \dots, a_n$  ab. Außerdem stehen die Quadriken  $Q_{\lambda_i}$  im Punkt  $x$  senkrecht aufeinander, d.h. wenn für  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein Normalenvektor von  $Q_{\lambda_i}$  im Punkt  $x$  mit  $n_i$  bezeichnet wird, so gilt  $\langle n_i, n_j \rangle = 0$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ .

*Beweis.* Die gesuchten Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind gerade die Lösungen  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$  der Gleichung  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 1$ , wobei  $x_1, \dots, x_n$  die Einträge von  $x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$  seien. Betrachte daher die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\} \longrightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i + \lambda}.$$

Die Ableitung ist  $f'(\lambda) = -\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda)^2} < 0$ . Somit ist  $f$  auf den Zusammenhangskomponenten ihres Definitionsbereiches jeweils streng monoton fallend, d.h. auf den Intervallen  $(-\infty; -a_n), (-a_n; -a_{n-1}), \dots, (-a_2; -a_1), (-a_1; \infty)$ . Außerdem gilt

$$\lim_{\lambda \searrow -a_j} f(\lambda) = \lim_{\lambda \searrow -a_j} \frac{x_j^2}{a_j + \lambda} = \infty, \quad \lim_{\lambda \nearrow -a_j} f(\lambda) = \lim_{\lambda \nearrow -a_j} \frac{x_j^2}{a_j + \lambda} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f(\lambda) = 0$$

für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Somit folgt wegen der Monotonie von  $f$  und nach dem Zwischenwertsatz, dass es in den Intervallen  $(-a_1; \infty), (-a_2; -a_1), \dots, (-a_n; -a_{n-1})$  jeweils genau eine Lösung für die Gleichung  $f(\lambda) = 1$  gibt. Seien diese mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  bezeichnet, d.h.  $\lambda_1 \in (-a_1; \infty), \lambda_2 \in (-a_2; -a_1), \dots, \lambda_n \in (-a_n; -a_{n-1})$ . Außerdem gibt es im Intervall  $(-\infty; -a_n)$  aus demselben Grund keine Lösung für  $f(\lambda) = 1$ . Nun ist  $f(\lambda) = 1 \iff x \in Q_\lambda$ , d.h. die Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind so gewählt, dass sie  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$  mit  $x \in Q_{\lambda_i}$  und  $\text{Typ}(Q_{\lambda_i}) = i - 1$  für  $i = 1, \dots, n$  erfüllen.

Die glatte Abhängigkeit der  $\lambda_j$  von  $x$  folgt direkt mit Satz 1.1, denn es gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i + \lambda_j} = 1 \text{ und } \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_j} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(a_i + \lambda_j)^2} \neq 0.$$

Auf analoge Weise folgt die glatte Abhängigkeit der  $\lambda_j$  von jedem  $a_k$ , denn

$$\frac{d}{da_k} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i + \lambda_j} = - \frac{x_k^2}{(a_k + \lambda_j)^2} \neq 0.$$

Sei nun  $Q_\lambda$  eine Quadrik der konfokalen Schar. Für  $y \in Q_\lambda$  ist ein Normalenvektor von  $Q_\lambda$  an der Stelle  $y$  durch

$$\frac{1}{2} \nabla_y \left( \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{a_i + \lambda} \right) = \left( \frac{y_1}{a_1 + \lambda}, \dots, \frac{y_n}{a_n + \lambda} \right)^T$$

gegeben. Seien nun für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$  die Normalenvektoren zu den Quadriken  $Q_{\lambda_i}$  bzw.  $Q_{\lambda_j}$  jeweils im Punkt  $x$  durch  $n_i := \left( \frac{x_1}{a_1 + \lambda_i}, \dots, \frac{x_n}{a_n + \lambda_i} \right)^T$  bzw.  $n_j := \left( \frac{x_1}{a_1 + \lambda_j}, \dots, \frac{x_n}{a_n + \lambda_j} \right)^T$  gegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle n_i, n_j \rangle &= \sum_{p=1}^n \frac{x_p^2}{(a_p + \lambda_i)(a_p + \lambda_j)} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \sum_{p=1}^n x_p^2 \frac{(a_p + \lambda_i) - (a_p + \lambda_j)}{(a_p + \lambda_i)(a_p + \lambda_j)} \\ &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \sum_{p=1}^n x_p^2 \left( \frac{1}{a_p + \lambda_j} - \frac{1}{a_p + \lambda_i} \right) = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \sum_{p=1}^n \frac{x_p^2}{a_p + \lambda_j} - \sum_{p=1}^n \frac{x_p^2}{a_p + \lambda_i} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

denn aus  $x \in Q_{\lambda_i} \cap Q_{\lambda_j}$  folgt  $\sum_{p=1}^n \frac{x_p^2}{a_p + \lambda_j} = \sum_{p=1}^n \frac{x_p^2}{a_p + \lambda_i} = 1$ . □

**Bemerkung.** Sind die Parameter  $a_1, \dots, a_n$  nicht alle unterschiedlich, so sei

$$k := |\{a_1, \dots, a_n\}| < n.$$

Dann gilt die analoge Aussage des Theorems für  $k$  eindeutige Quadriken der Quadriken-schar.

### 3 Schnitt einer zentralen Quadrik mit einer Hyper-ebene

Als Nächstes soll es um die Frage gehen, was passiert, wenn man eine zentrale Quadrik mit einer Hyperebene durch den Nullpunkt schneidet. Diese Frage ist für den Beweis des Theorems 2 relevant. Wenn man von der Wahl des Koordinatensystems absieht, kann nach Satz 2.9 jede Quadrik der Form  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Dx, x \rangle = 1\}$ , wobei  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, invertierbare Matrix ist, als zentrale Quadrik betrachtet werden.

**Satz 3.1.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ , sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, invertierbare Matrix, und sei  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  durch

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & * \\ \hline * & \dots & * & * \end{array} \right)$$

definiert. Dann ist  $\tilde{A}$  symmetrisch, und es gilt:

$$\tilde{A} \text{ ist invertierbar} \iff \langle A^{-1}e_n, e_n \rangle \neq 0.$$

*Beweis.* Dass  $\tilde{A}$  symmetrisch ist, folgt direkt aus der Tatsache, dass  $A$  symmetrisch ist. Der Wert von  $\langle A^{-1}e_n, e_n \rangle$  ist genau der Eintrag der Matrix  $A^{-1}$  in der  $n$ -ten Zeile und  $n$ -ten Spalte. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich dieser Eintrag über die adjungierte Matrix bestimmen lässt<sup>2</sup>. Somit ergibt sich

$$\langle A^{-1}e_n, e_n \rangle = \frac{\det \tilde{A}}{\det A}.$$

Somit ist genau dann  $\langle A^{-1}e_n, e_n \rangle \neq 0$ , wenn  $\det \tilde{A} \neq 0$ , also wenn  $\tilde{A}$  invertierbar ist.  $\square$

**Lemma 3.2.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ , sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, invertierbare Matrix. Sei  $v \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $|v| = 1$ . Sei  $\{b_1, \dots, b_{n-1}, v\}$  eine Orthonormalbasis vom  $\mathbb{R}^n$ , sei  $B \in O(n, \mathbb{R})$  die Matrix mit diesen Basisvektoren in den Spalten. Sei  $D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$

durch  $B^T A B = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & D & & \vdots \\ & & & * \\ \hline * & \dots & * & * \end{array} \right)$  gegeben. Dann ist  $D$  symmetrisch, und es gilt:

$$D \text{ ist invertierbar} \iff \langle A^{-1}v, v \rangle \neq 0.$$

*Beweis.* Dass  $D$  symmetrisch ist, folgt direkt aus der Tatsache, dass  $B^T A B$  symmetrisch ist. Per Definition von  $B$  ist die letzte Spalte von  $B$  durch  $v$  gegeben, d.h.  $v = B e_n$ . Somit folgt:

$$\langle A^{-1}v, v \rangle = \langle A^{-1}B e_n, B e_n \rangle = \langle B^T A^{-1} B e_n, e_n \rangle = \langle B^{-1} A^{-1} B e_n, e_n \rangle$$

---

<sup>2</sup>siehe z.B. [1], Abschnitt 4.4.

$$= \left\langle (B^{-1}AB)^{-1}e_n, e_n \right\rangle = \left\langle (B^T AB)^{-1}e_n, e_n \right\rangle.$$

Aufgrund der Definition von  $D$  folgt somit direkt aus Satz 3.1, dass  $D$  genau dann invertierbar ist, wenn  $\langle A^{-1}v, v \rangle \neq 0$  ist.  $\square$

**Satz 3.3** (Schnitt einer Quadrik mit einer Hyperebene). *Sei  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle = 1\}$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, invertierbare Matrix ist. Sei  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $n - 1$ -dimensionaler linearer Unterraum. Sei  $v$  ein Normalenvektor von  $W$  mit  $|v| = 1$ , und es gelte  $\langle A^{-1}v, v \rangle \neq 0$ . Dann existiert eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_W = (b_1, \dots, b_{n-1})$  von  $W$  und eine invertierbare Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ , sodass*

$$\tilde{Q} := Q \cap W = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{x}_i b_i \mid \langle D\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 1 \right\}.$$

Sei ferner die lineare Abbildung  $\text{pr}_v : \mathbb{R}^n \rightarrow W$  durch  $x \mapsto x - \langle x, v \rangle \cdot v$  gegeben. (Diese Abbildung wird auch als die orthogonale Projektion auf  $W$  bezeichnet.) Dann sind die Diagonaleinträge von  $D$  gerade die Eigenwerte der Abbildung

$$F := \text{pr}_v \circ A|_W : W \rightarrow W, w \mapsto \text{pr}_v(Aw).$$

Somit ist  $D$  bis auf die Reihenfolge der Diagonaleinträge eindeutig bestimmt. Außerdem sind alle Basisvektoren aus  $\mathcal{B}_W$  Eigenvektoren von  $F$ .

Satz 3.3 kann auch so formuliert werden: Der Schnitt einer zentralen Quadrik mit einer Hyperebene ergibt (unter gewissen Voraussetzungen) wieder eine zentrale Quadrik.

*Beweis.* Sei  $\tilde{\mathcal{B}}_W = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1})$  zunächst irgendeine Orthonormalbasis von  $W$ . Dann ist  $\mathcal{B} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1}, v)$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $B$  die Matrix mit den Basisvektoren von  $\mathcal{B}$  in den Spalten. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= Q \cap W \\ &= \{x \mid \langle Ax, x \rangle = 1 \wedge \langle x, v \rangle = 0\} \\ &= \{Bx \mid \langle ABx, Bx \rangle = 1 \wedge \langle Bx, v \rangle = 0\} \\ &= \{Bx \mid \langle B^T ABx, x \rangle = 1 \wedge \langle x, B^T v \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Mit der Darstellung  $B^T AB = \begin{pmatrix} D & * \\ * & * \end{pmatrix}$  mit  $D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  ergibt sich mit der Voraussetzung  $\langle A^{-1}v, v \rangle \neq 0$  mit Lemma 3.2 gerade, dass  $D$  symmetrisch und invertierbar ist.

Betrachte nun  $Bx \in \tilde{Q}$ . Da  $B^T v = (\langle \tilde{b}_1, v \rangle, \dots, \langle \tilde{b}_{n-1}, v \rangle, \langle v, v \rangle)^T = e_n$  der  $n$ -te Einheitsvektor ist, kann man aufgrund von  $\langle x, B^T v \rangle = \langle x, e_n \rangle = 0$  auch  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)^T$  schreiben. Definiere  $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Somit ist für  $x \in \tilde{Q}$

$$\langle B^T ABx, x \rangle = 1 \iff \langle D\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 1,$$

außerdem ist  $Bx = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \tilde{b}_i$ . Somit lässt sich  $\tilde{Q}$  darstellen als

$$\tilde{Q} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i \tilde{b}_i \mid \langle D\tilde{x}, \tilde{x} \rangle = 1 \right\}.$$

Falls  $D$  schon Diagonalgestalt hat, so besitzt  $\tilde{Q}$  schon die gewünschte Gestalt. Andernfalls kann wie folgt vorgegangen werden:  $D$  ist diagonalisierbar, da  $D$  symmetrisch ist, d.h. es gibt ein  $M \in O(n-1, \mathbb{R})$  sodass  $\tilde{D} := M^T D M$  Diagonalgestalt besitzt.

Sei nun  $C := B \cdot \left( \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ , dann ergibt sich  $C^T A C = \left( \begin{array}{c|c} M^T D M & * \\ \hline * & * \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{D} & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$ .

Andererseits sind die Spalten von  $C$  durch  $(b_1, \dots, b_{n-1}, v)$  gegeben, mit  $b_j := \sum_{i=1}^{n-1} m_{ij} \tilde{b}_i$  für  $j = 1, \dots, n-1$ , dabei sind  $m_{ij}$  die Einträge der Matrix  $M$ . Wenn man nun versteht, warum die Vektoren  $(b_1, \dots, b_{n-1})$  eine Orthonormalbasis von  $W$  bilden, kann man oBdA die Basis von  $W$  so wählen und somit annehmen, dass  $D$  Diagonalgestalt besitzt.

Sei  $B_W$  die Matrix mit den Spalten  $(b_1, \dots, b_{n-1})$  und  $\tilde{B}_W$  die Matrix mit den Spalten  $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-1})$ . Es gilt  $\tilde{B}_W = B_W \cdot M$ . Da  $M$  invertierbar ist, ergibt sich

$$\ker \tilde{B}_W = \ker B_W = 0 \text{ und } \operatorname{im} \tilde{B}_W = \operatorname{im} B_W = W.$$

Somit ist  $(b_1, \dots, b_{n-1})$  eine Basis von  $W$ . Die Orthonormalitätsbedingung ergibt sich aus direkter Rechnung:

$$\begin{aligned} \langle b_i, b_j \rangle &= \left\langle \sum_{p=1}^{n-1} m_{pi} \tilde{b}_p, \sum_{q=1}^{n-1} m_{qj} \tilde{b}_q \right\rangle = \sum_{p,q=1}^{n-1} m_{pi} m_{qj} \langle \tilde{b}_p, \tilde{b}_q \rangle \\ &= \sum_{p,q=1}^{n-1} m_{pi} m_{qj} \delta_{pq} = \sum_{p=1}^{n-1} m_{pi} m_{pj}. \end{aligned}$$

Dies sind aber genau die Einträge von  $M^T M = \mathbb{1}$ , somit ergibt sich  $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ . Somit kann oBdA angenommen werden, dass die Basis  $\mathcal{B}_W$  so gewählt ist, dass die Matrix  $D$  Diagonalgestalt besitzt.

Um nun die Diagonaleinträge von  $D$  als Eigenwerte der Abbildung  $F$  zu verstehen, betrachte die Darstellung von  $F$  als  $(n-1)$ -dimensionale quadratische Matrix bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_W$ :

Zunächst wird  $A|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}_W$  und der Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  mit der Matrix  $A \cdot B_W$  dargestellt.

Als Nächstes betrachte die Basiswechsellmatrix auf dem Raum  $\mathbb{R}^n$  von der Standardbasis zur Basis  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_W, v)$ : Diese ist durch  $(B_W, v)^{-1} = (B_W, v)^T$  gegeben.

Als nächstes betrachte die Darstellung von  $\operatorname{pr}_v : \mathbb{R}^n \rightarrow W$  bezüglich der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}_W$ : Da die Projektion  $\operatorname{pr}_v$  den Unterraum  $W$  auf sich selbst abbildet, und  $\operatorname{pr}_v(v) = 0$ , ergibt sich die Matrix  $(\mathbb{1}, 0)$ .

Insgesamt ergibt sich die Darstellungsmatrix von  $F$  als Produkt dieser drei Matrizen:

$$(\mathbb{1}, 0) \begin{pmatrix} (B_W)^T \\ v \end{pmatrix} (A \cdot B_W) = (B_W)^T A B_W.$$

Andererseits gilt per Definition  $B = (B_W, v)$ , und somit

$$\left( \begin{array}{c|c} D & * \\ \hline * & * \end{array} \right) = B^T A B = \begin{pmatrix} (B_W)^T \\ v \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} B_W & v \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} (B_W)^T A B_W & * \\ \hline * & * \end{array} \right).$$

Somit ist  $D = (B_W)^T A B_W$  die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_W$ , und die Eigenwerte von  $F$  sind gerade die Eigenwerte von  $D$ . Da  $D$  in diesem Fall schon Diagonalgestalt besitzt, sind dies gerade die Diagonaleinträge, und die Basis  $\mathcal{B}_W$  besteht aus Eigenvektoren von  $F$ .  $\square$

Nun bleibt noch die Frage, unter welchen Voraussetzungen der Schnitt einer zentralen Quadrik mit einer Hyperebene eine  $(n-1)$ -achsige Quadrik ergibt. Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.3 geht es also um den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten von  $A$  und  $D$ . Einen ersten Einblick in diesen Zusammenhang liefert „Cauchy’s Interlacing Theorem“, siehe [4]:

**Satz 3.4.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix, und sei  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  durch

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & & & \vdots \\ & \tilde{A} & & * \\ \hline * & \dots & * & * \end{array} \right)$$

gegeben. Seien  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ , und  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$  die Eigenwerte von  $\tilde{A}$  (Die Eigenwerte seien entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit mehrfach angegeben). Dann liegen die  $\mu_i$  genau zwischen den  $\lambda_j$ , d.h.

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n,$$

oder anders ausgedrückt,

$$\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, n-1.$$

**Korollar 3.5.** Gibt es mit den Bezeichnungen von Satz 3.4 einen  $k$ -fachen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  (d.h. der zugehörige Eigenraum ist von der Dimension  $k$ ) mit  $k \geq 2$ , so ist  $\lambda$  ein  $l$ -facher Eigenwert von  $\tilde{A}$  mit  $k+1 \geq l \geq k-1$ .

Könnte man Satz 3.4 mit „ $<$ “ anstatt „ $\leq$ “ formulieren, so hätte man den Zusammenhang, dass der Schnitt einer  $n$ -achsigen Quadrik mit einer Hyperebene eine  $(n-1)$ -achsige Quadrik ergibt. Dass dies nicht ohne weiteres möglich ist, zeigt das folgende Beispiel:

**Beispiel 3.6.** Sei  $D := \text{diag}(1, 5, 7) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , und sei  $v := \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ . Dann ist  $|v| = 1$  und  $\langle D^{-1}v, v \rangle = \frac{5}{7} \neq 0$ .

Definiere nun  $b_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$  und  $b_2 := (0, 1, 0)^T$ . Man rechnet leicht nach, dass  $\{b_1, b_2, v\}$  eine Orthonormalbasis bilden, somit ist  $B := (b_1, b_2, v) \in O(3, \mathbb{R})$ . Es gilt aber

$$B^T D B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit beschreibt  $Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Dx, x \rangle = 1\}$  einen 3-achsigen Ellipsoiden. Jedoch ist mit  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$  die Quadrik  $\tilde{Q} := Q \cap W = \{x_1 b_1 + x_2 b_2 \mid 5(x_1^2 + x_2^2) = 1\}$  nach Satz 3.3, somit keine 2-achsige Ellipse, sondern einen Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Beispiel 3.6 zeigt, dass der Schnitt einer  $n$ -achsigen zentralen Quadrik mit einer Hyperebene nicht immer eine  $(n-1)$ -achsige Quadrik ergibt. Folgendes Beispiel 3.7 zeigt zudem, dass der Schnitt einer zentralen Quadrik im  $\mathbb{R}^n$  mit einer Ebene  $(n-1)$ -achsig sein kann, auch wenn die ursprüngliche Quadrik nicht  $n$ -achsig ist:

**Beispiel 3.7.** Sei  $D := \text{diag}(1, 1, 11) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , sei  $v := \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T$ , dann gilt  $|v| = 1$  und  $\langle D^{-1}v, v \rangle = \frac{9}{11} \neq 0$ .

Definiere nun  $b_1 := (1, 0, 0)^T$  und  $b_2 := \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$ . Dann bildet  $\{b_1, b_2, v\}$  eine Orthonormalbasis, sodass  $B := (b_1, b_2, v) \in O(3, \mathbb{R})$  ist. Weiter folgt

$$B^T D B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei nun  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ , und sei  $Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle Dx, x \rangle = 1\}$ . Dann ist  $\tilde{Q} := Q \cap W = \{x_1 b_1 + x_2 b_2 \mid x_1^2 + 9x_2^2 = 1\}$  nach Satz 3.3. Dies ist eine 2-achsige Ellipse, und die Quadrik  $Q$  ist nicht 3-achsige.

Sollte nun der Fall eintreten, dass der Schnitt einer Quadrik im  $\mathbb{R}^n$  mit einer Hyperebene eine  $(n-1)$ -achsige Quadrik ist, so zeigt der folgende Satz 3.8, dass die neue Quadrik glatt mit der Hyperebene variiert.

**Satz 3.8.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische, invertierbare Matrix. Für jedes  $v \in S^{n-1}$  sei  $W_v := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ , und sei  $\text{pr}_v : \mathbb{R}^n \rightarrow W_v$  gegeben durch  $x \mapsto x - \langle x, v \rangle \cdot v$ . Sei zudem  $F_v := \text{pr}_v \circ A|_{W_v} : W_v \rightarrow W_v$ . Sei zusätzlich vorausgesetzt, dass ein  $v_0 \in S^{n-1}$  existiert, sodass  $F_{v_0}$  genau  $(n-1)$  verschiedene Eigenwerte besitzt.

Dann gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq S^{n-1}$  von  $v_0$ , sodass für jedes  $v \in U$  gilt, dass  $F_v$  genau  $(n-1)$  verschiedene Eigenwerte besitzt, und diese Eigenwerte glatt mit  $v$  variieren.

*Beweis.* Es soll der Satz 1.1 verwendet werden, vorher muss noch gezeigt werden, dass in einer Umgebung von  $v_0$  die Basis des jeweiligen orthogonalen komplements  $W_v$  in glatter Abhängigkeit von  $v$  gewählt werden kann:

Erweitere den Vektor  $v_0$  mit passenden Vektoren zu einer Basis  $(b_1, \dots, b_{n-1}, v_0)$  des  $\mathbb{R}^n$ . Nun existiert eine Umgebung  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $v_0$ , sodass die Vektoren  $(b_1, \dots, b_{n-1}, v)$  für jedes  $v \in U_1$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$  bilden. Dies sieht man z.B. so: Sei  $n$  ein Normalenvektor des von  $b_1, \dots, b_{n-1}$  aufgespannten linearen Unterraumes, und sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $z \mapsto \langle z, n \rangle$ . Dann ist  $f(z) = 0$  äquivalent zu  $z \in \text{span}\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ . Da  $f$  stetig ist und  $f(v_0) \neq 0$ , besitzt  $U_1 := f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  die gewünschte Eigenschaft.

Nun wende für jedes  $v \in U_1$  das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren der Reihe nach auf die Vektoren  $b_1$  bis  $b_{n-1}$  an. Eine Betrachtung des Verfahrens<sup>3</sup> zeigt, dass die so erhaltene Orthonormalbasis  $\mathcal{C}_v = (c_1(v), \dots, c_{n-1}(v))$  von  $W_v$  glatt von  $v$  abhängt. Definiere die Matrix  $C_v := (c_1(v), \dots, c_{n-1}(v)) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ .

Wende nun wie folgt Satz 1.1 an: Betrachte die Abbildung

$$G : U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (v, \lambda) \mapsto \det((C_v)^T A C_v - \lambda \cdot \mathbf{1}).$$

Offensichtlich ist  $G$  glatt, da die Matrix  $C_v$  glatt von  $v$  abhängt, und die Abbildung  $\det : \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. Aus dem Beweis zum Satz 3.3 ist außerdem bekannt, dass die Matrix  $(C_v)^T A C_v$  die Darstellungsmatrix der Abbildung  $F_v$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C}_v$  ist. Somit ist  $G(v, \lambda)$  gerade das charakteristische Polynom von  $F_v$ . Für  $v \in U_1$  ist somit  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau dann Eigenwert von  $F_v$ , wenn  $G(v, \lambda) = 0$ .

<sup>3</sup>siehe z.B. [1], Kapitel 7.2, Satz 5

Hat  $F_{v_0}$  nun genau  $(n-1)$  Eigenwerte, so ist jeder dieser Eigenwerte  $\lambda_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$  eine einfache Nullstelle des Polynoms  $G(v_0, \cdot)$ , weshalb  $\frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i} G(v_0, \lambda) \neq 0$  ist. Somit ist die Voraussetzung von Satz 1.1 erfüllt, und man findet für jedes  $\lambda_i$  eine Umgebung  $V_i \subseteq U_1$  von  $v_0$ , sodass eine glatte Abbildung  $h_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto h_i(v)$  existiert, sodass  $h_i(v)$  Eigenwert von  $F_v$  ist, und  $h_i(v_0) = \lambda_i$ .

Setzt man nun  $U_2 := V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}$ , so lässt sich eine glatte Abbildung  $H : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $H = (h_1, \dots, h_{n-1})$  definieren.

Nun muss noch gewährleistet werden, dass  $H(v)$  paarweise verschiedene Einträge besitzt. Da dies für  $H(v_0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  erfüllt ist, lässt sich eine Umgebung  $U_3 \subset \mathbb{R}^{n-1}$  von  $H(v_0)$  finden, wo die Vektoren paarweise verschiedene Einträge besitzen. Setzt man nun  $U := H^{-1}(U_3) \cap S^{n-1}$ , sind die geforderten Eigenschaften erfüllt.  $\square$

## 4 Polare Dualität

Um sich der Aussage über das Billard im Inneren eines  $n$ -achsigen Ellipsoiden zu nähern, wird als nächstes ein Theorem formuliert, das besagt, dass es zu einer gegebenen konfokalen Quadriken­schar im  $\mathbb{R}^n$ , welche gewisse Voraussetzungen erfüllt, zu fast jeder Geraden  $n - 1$  verschiedene Quadriken der Schar gibt, die tangential an der Geraden liegen.

Für den Beweis hiervon nach [6] ist es notwendig, das Konzept der polaren Dualität zu verwenden. Dieses Konzept basiert auf der Dualität von Punkten und Hyperebenen.

**Definition und Satz 4.1** (Dualität von Punkten und Ebenen). *Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Für  $p \in V$  sei die zu  $p$  duale Hyperebene  $H_p$  gegeben durch*

$$H_p := \{x \in V \mid \langle p, x \rangle = 1\}.$$

Die Abbildung

$$\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_V : V \setminus \{0\} \longrightarrow \{H \mid H \subset V \text{ ist eine affine Hyperebene mit } 0 \notin H\}, \quad p \mapsto H_p$$

ist wohldefiniert und bijektiv, und wird als Dualität zwischen Punkten und Hyperebenen in  $V$  bezeichnet. Die Umkehrabbildung ist durch

$$\mathcal{D}^{-1} : H = s + U \mapsto n_U$$

gegeben, dabei ist  $U$  ein  $n-1$ -dimensionaler linearer Unterraum, und  $n_U$  ist der eindeutige Normalenvektor von  $U$ , der  $\langle h, n_U \rangle = 1$  für jedes  $h \in H$  erfüllt. Außerdem gilt:

$$H_p = \begin{cases} \frac{p}{\langle p, p \rangle} + \ker(\langle p, \cdot \rangle) & \text{falls } p \neq 0 \\ \emptyset & \text{falls } p = 0 \end{cases}.$$

*Beweis.* Zur Wohldefiniertheit von  $\mathcal{D}$ : Zeige, dass  $0 \notin H_p$  für  $p \neq 0$ .

Für  $x, p \in V, p \neq 0$  gilt:

$$x \in H_p \iff \langle p, x \rangle = 1 \iff 0 = \left\langle p, x - \frac{p}{\langle p, p \rangle} \right\rangle \iff x \in \frac{p}{\langle p, p \rangle} + \ker(\langle p, \cdot \rangle),$$

somit ist  $H_p = \frac{p}{\langle p, p \rangle} + \ker(\langle p, \cdot \rangle)$  eine Hyperebene mit  $0 \notin H_p$ .

Zur Injektivität: Seien  $p, q \in V \setminus \{0\}$  mit  $H_p = H_q$ . Somit ist für alle  $x \in V$  die Bedingung  $\langle p, x \rangle = 1 \iff \langle q, x \rangle = 1$  erfüllt. Hieraus folgt aber, dass die linearen Abbildungen  $\langle p, \cdot \rangle$  und  $\langle q, \cdot \rangle$  übereinstimmen: Sei nämlich  $x \in V$ . Falls  $\langle p, x \rangle \neq 0$ , so folgt

$$1 = \frac{\langle p, x \rangle}{\langle p, x \rangle} = \left\langle p, \frac{x}{\langle p, x \rangle} \right\rangle \implies 1 = \left\langle q, \frac{x}{\langle p, x \rangle} \right\rangle = \frac{\langle q, x \rangle}{\langle p, x \rangle} \implies \langle p, x \rangle = \langle q, x \rangle.$$

Aus  $\langle q, x \rangle \neq 0$  folgt mit einer analogen Rechnung, dass  $\langle p, x \rangle = \langle q, x \rangle \neq 0$ . Somit gilt nach Kontraposition:  $\langle p, x \rangle = 0 \implies \langle q, x \rangle = 0$ .

Nun bedeutet dies insbesondere, dass  $p_i = \langle p, e_i \rangle = \langle q, e_i \rangle = q_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , d.h.  $p = q$ .

Zur Surjektivität: Sei  $H$  eine Hyperebene mit  $0 \notin H$ . Dann lässt sich  $H$  als  $s + U$  darstellen, wobei  $U$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler linearer Unterraum mit  $s \notin U$  ist. Somit ist die Zerlegung  $V = (\mathbb{R} \cdot s) \oplus U$  möglich. Sei nun  $n$  ein Normalenvektor von  $U$ . Aus  $s \notin U$

folgt, dass  $\langle s, n \rangle \neq 0$ . Setze daher  $p := n/\langle s, n \rangle$ , dann folgt  $\langle s, p \rangle = 1$ . Sei nun  $x \in V$ , dann ist  $x = \alpha \cdot s + u$  für passendes  $u \in U$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wegen  $\langle p, u \rangle = 0$  folgt

$$x \in H_p \iff \langle p, x \rangle = 1 \iff 1 = \langle p, x \rangle = \alpha \langle p, s \rangle + \langle p, u \rangle = \alpha \iff x = s + u \in s + U = H.$$

Somit ist  $H = H_p$ .

Somit ist die Bijektivität gezeigt.

Im Beweis der Surjektivität sieht man, dass  $n_U := p$  ein Normalenvektor von  $H$  ist, der  $\langle s + u, n_U \rangle = 1$  für jedes  $s + u \in H$  erfüllt. Die Eindeutigkeit von  $n_U$  folgt aus der Tatsache, dass  $\mathcal{D}$  bijektiv ist.

Die Tatsache  $H_0 = \emptyset$  ist offensichtlich, da  $\langle 0, x \rangle = 0 \neq 1$  für alle  $x \in V$ .  $\square$

**Definition 4.2.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.  $M \subset V$  heißt sternförmige Hyperfläche, falls  $M$  eine Hyperfläche ist, welche die Bedingung  $x \notin T_x M$  für alle  $x \in M$  erfüllt.

**Bemerkung.** Sternförmige Hyperflächen enthalten den Nullvektor nicht.

Für sternförmige Hyperflächen lässt sich nun das Konzept der polaren Dualität definieren.

**Definition 4.3.** Sei  $M \subset V$  eine sternförmige Hyperfläche. Eine Menge  $M^*$  heißt polar duale Menge zu  $M$ , falls gilt:

$$p \in M^* \iff x + T_x M = \mathcal{D}(p) \text{ für ein } x \in M.$$

Die Abbildung  $\delta \equiv \delta_M : M \rightarrow M^*, x \mapsto \mathcal{D}^{-1}(x + T_x M)$  sei als Dualitätsabbildung von  $M$  bezeichnet.

**Bemerkung.** Für eine sternförmige Hyperfläche  $M \subset V$  ist die polar duale Menge  $M^*$  eindeutig definiert, denn  $M^* = \mathcal{D}^{-1}(\{x + T_x M \mid x \in M\}) = \delta(M)$ . Außerdem ist die Dualitätsabbildung surjektiv.

**Bemerkung.** Für eine sternförmige Hyperfläche  $M \subset V$  sei die polar duale Menge  $M^*$  eine Mannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung  $\delta : M \rightarrow M^*$  glatt.

Falls  $\delta$  zusätzlich ein lokaler Diffeomorphismus ist, so lässt sich  $(M^*)^* = M$  beweisen, was die Bezeichnung „polar duale Menge“ erklärt.

**Satz 4.4.** Sei  $M \subset V$  eine sternförmige Hyperfläche, sodass auch  $M^*$  sternförmige Hyperfläche ist. Sei außerdem die Dualitätsabbildung  $\delta = \delta_M$  ein lokaler Diffeomorphismus. Dann gilt:  $(M^*)^* = M$ .

*Beweis.* Sei  $x \in M$  und  $p := \delta(x)$ , d.h.  $x + T_x M$  ist dual zu  $p$ , insbesondere ist  $\langle p, x \rangle = 1$ . Zu zeigen ist, dass  $p + T_p M^*$  dual zu  $x$  ist. Da  $\langle p, x \rangle = 1$  bekannt ist, reicht es zu zeigen, dass  $\langle v, x \rangle = 0$  für jedes  $v \in T_p M^*$ .

Da  $\delta$  ein lokaler Diffeomorphismus ist und  $M^*$  eine Hyperfläche, wähle eine  $M$ -offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $x$ , eine  $M^*$ -offene Umgebung  $U_D \subseteq M^*$  von  $p$  und eine offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  und einen Diffeomorphismus  $\phi : \Omega \rightarrow U_D$ , sodass die Dualitätsabbildung mit eingeschränktem Definitions- und Bildbereich  $\delta_U : U \rightarrow U_D$  ein Diffeomorphismus ist. Definiere  $q := \phi^{-1}(p)$  (siehe Abb. 4).

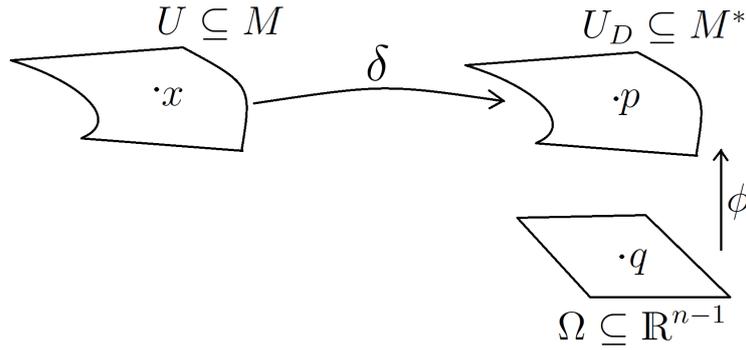


Abbildung 4: Dualitätsabbildung in einer Umgebung von  $x$

Sei nun  $v \in T_p M^*$ , zu zeigen ist, dass  $\langle v, x \rangle = 0$ . Da  $T_p M^* = \text{im } D\phi(q)$ , gibt es ein  $w \in \mathbb{R}^{n-1}$  sodass  $v = D\phi(q)w$ . Nun gilt für genügend kleines  $\eta > 0$ , dass  $\forall \varepsilon \in (-\eta, \eta) : q + \varepsilon w \in \Omega$ . Da  $\phi$  glatt und somit insbesondere differenzierbar ist, folgt:

$$\begin{aligned} \phi(q + \varepsilon w) &= \phi(q) + D\phi(q)(\varepsilon w) + o(|\varepsilon w|) \\ &= p + \varepsilon v + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Dabei ist „ $o$ “ das Landau-Symbol<sup>4</sup>. Da  $\delta_U^{-1}$  differenzierbar ist, folgt somit

$$\begin{aligned} \delta_U^{-1}(\phi(q + \varepsilon w)) &= \delta_U^{-1}(p + \varepsilon v + o(\varepsilon)) \\ &= x + D\delta_U^{-1}(p)(\varepsilon v + o(\varepsilon)) + o(|\varepsilon v + o(\varepsilon)|) \\ &= x + \varepsilon \underbrace{D\delta_U^{-1}(p)(v)}_{=: u} + \underbrace{D\delta_U^{-1}(p)(o(\varepsilon))}_{=: o(\varepsilon)} + o(|\varepsilon v + o(\varepsilon)|) \\ &= x + \varepsilon u + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Dabei ist  $u \in T_x M$ . Nun folgt aufgrund der Dualität

$$\begin{aligned} \langle \phi(q + \varepsilon w), \delta_U^{-1}(\phi(q + \varepsilon w)) \rangle &= 1 \\ \implies \langle p + \varepsilon v + o(\varepsilon), x + \varepsilon u + o(\varepsilon) \rangle &= 1 \\ \implies \langle p, x \rangle + \varepsilon(\langle v, x \rangle + \langle p, u \rangle) &= 1 + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Da  $x + T_x M$  dual zu  $p$  ist, folgt  $\langle p, u \rangle = 0$ , da  $u \in T_x M$ . Außerdem ist  $\langle p, x \rangle = 1$ , somit folgt

$$\varepsilon \langle v, x \rangle = o(\varepsilon).$$

Dies kann nur für  $\langle v, x \rangle = 0$  erfüllt sein. □

Folgender Satz beschreibt die polar dualen Mengen zentraler Quadriken.

**Satz 4.5.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ , sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und invertierbar. Dann ist  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax \rangle = 1\}$  eine sternförmige Hyperfläche, und  $Q^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, A^{-1}x \rangle = 1\}$  ist polar dual zu  $Q$ . Außerdem ist die Dualitätsabbildung durch  $\delta(x) = Ax$  gegeben. Diese Abbildung ist bijektiv.

<sup>4</sup>Siehe z.B. [3], Ende von Kapitel 12

*Beweis.* Nach Satz 2.5 und 2.9 ist  $Q$  eine Hyperfläche. Sei  $x \in Q$ . Dann ist  $T_x Q = \ker(\langle \nabla_x(x^T Ax), \cdot \rangle) = \ker(\langle Ax, \cdot \rangle)$  nach Korollar 1.8. Außerdem ist  $\langle Ax, x \rangle = 1$ . Somit folgt  $x \notin T_x Q$  für alle  $x \in Q$ , d.h.  $Q$  ist eine sternförmige Hyperfläche. Mit  $p := Ax$  gilt dann  $\langle p, x \rangle = 1$  und somit  $H_p = x + \ker(\langle Ax, \cdot \rangle) = x + T_x Q$ . Es folgt  $\delta_Q(x) = Ax$  für alle  $x \in Q$ . Diese Abbildung ist injektiv, und per Definition surjektiv. Außerdem gilt

$$Q^* = \delta(Q) = \{Ax \mid x \in Q\} = \{x \mid A^{-1}x \in Q\} = \{x \mid 1 = \langle A^{-1}x, A(A^{-1}x) \rangle = \langle A^{-1}x, x \rangle\}.$$

Somit besitzt  $Q^*$  die gewünschte Gestalt.  $\square$

**Korollar 4.6.** *Für eine Quadrik  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax \rangle = 1\}$  mit symmetrischer, invertierbarer Matrix  $A$  gilt:  $(Q^*)^* = Q$ .*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 4.4 und Satz 4.5.  $\square$

Bevor das Theorem 2 formuliert und bewiesen werden kann, werden noch einige Lemmata benötigt.

**Lemma 4.7.** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und invertierbar. Sei  $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x \rangle = 1\}$ . Sei  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sodass  $\langle Av, v \rangle \neq 0$ . Sei  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ . Sei*

$$P := \{y \in W \mid \text{Die Gerade } y + \mathbb{R}v \text{ liegt tangential an } Q\}.$$

*Dann ist  $P$  eine Hyperfläche bezüglich des Unterraums  $W$ .*

*Beweis.* Sei  $y \in W$ . Dann ist  $y \in P$  genau dann, wenn die quadratische Gleichung  $\langle A(y + tv), y + tv \rangle - 1 = 0$  in  $t$  eine doppelte Nullstelle besitzt. Dies ist genau der Fall, wenn die Diskriminante gleich Null ist, was äquivalent zu

$$\langle Ay, v \rangle^2 - \langle Av, v \rangle (\langle Ay, y \rangle - 1) = 0$$

ist. Stelle nun  $P$  als Urbild eines regulären Wertes dar: Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$y \mapsto \begin{pmatrix} \langle Ay, v \rangle^2 - \langle Av, v \rangle (\langle Ay, y \rangle - 1) \\ \langle y, v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(y) \\ F_2(y) \end{pmatrix}.$$

Dann ist offensichtlich  $P = F^{-1}(0)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $0 \in \mathbb{R}^2$  ein regulärer Wert von  $F$  ist. Sei also  $y \in P$ . Es gilt:  $DF(y) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(y)^T \\ \nabla F_2(y)^T \end{pmatrix}$ . Eine direkte Rechnung ergibt  $\nabla F_2(y) = v$ , und für  $w \in \mathbb{R}^n$  ergibt sich

$$\langle \nabla F_1(y), w \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F_1(y + tw) = \langle w, 2A(\langle Ay, v \rangle \cdot v - \langle Av, v \rangle \cdot y) \rangle.$$

Somit ergibt sich durch sukzessives Einsetzen von  $w = e_i$  für  $i = 1, \dots, n$  in die obige Gleichung, dass

$$\nabla F_1(y) = 2A(\langle Ay, v \rangle \cdot v - \langle Av, v \rangle \cdot y).$$

Nun sind  $y$  und  $v$  linear unabhängig, da  $y \in P \subseteq W$ . Deshalb ist  $\nabla F_1(y) \neq 0$ , denn wäre  $\nabla F_1(y) = 0$ , so würde aufgrund der Invertierbarkeit von  $A$  folgen

$$\nabla F_1(y) = 0 \implies \langle Ay, v \rangle \cdot v - \langle Av, v \rangle \cdot y = 0 \implies \langle Ay, v \rangle = \langle Av, v \rangle = 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung  $\langle Av, v \rangle \neq 0$ . Daher ist  $\nabla F_1(y) \neq 0$ . Nun ist 0 genau dann ein regulärer Wert von  $F$ , wenn  $\nabla F_1(y)$  und  $\nabla F_2(y)$  linear unabhängig sind.

Angenommen, sie wären linear abhängig. Wegen  $\nabla F_1(y) \neq 0$  und  $\nabla F_2(y) = v$  folgt dann, dass  $\nabla F_1(y) = \lambda v$  für ein  $\lambda \neq 0$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \langle v, v \rangle &= \left\langle \frac{\nabla F_1(y)}{2}, v \right\rangle = \langle A(\langle Ay, v \rangle \cdot v - \langle Av, v \rangle \cdot y), v \rangle \\ &= \langle Ay, v \rangle \cdot \langle Av, v \rangle - \langle Av, v \rangle \cdot \langle Ay, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Wegen  $v \neq 0$  ergibt dies  $\lambda = 0$ , was ein Widerspruch zur Annahme darstellt.

Somit ist 0 ein regulärer Wert von  $F$ , d.h.  $P$  ist eine  $(n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Da  $P \subset W$  und  $W$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum ist, folgt die Aussage.  $\square$

**Lemma 4.8.** Sei  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in U}$  mit  $U := \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$  eine konfokale Quadriken­schar zu den Parametern  $a_1, \dots, a_n > 0$ , und sei  $v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ . Sei  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ . Sei  $D := \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ . Sei  $\tilde{U} := \left\{ \lambda \in U \mid \langle (D + \lambda \mathbf{1})^{-1} v, v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{a_i + \lambda} \neq 0 \right\} \subseteq U$ . Dann gibt es eine invertierbare Diagonalmatrix  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  und eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_W = (b_1, \dots, b_{n-1})$  von  $W$ , sodass für alle  $\lambda \in \tilde{U}$  gilt:

$$Q_\lambda^* \cap W = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i \mid \langle (\tilde{D} + \lambda \mathbf{1}) x, x \rangle = 1 \right\}.$$

Sei nun  $\text{pr}_v : \mathbb{R}^n \rightarrow W, x \mapsto x - \langle x, v \rangle \cdot v$  die orthogonale Projektion auf  $W$ . Definiere ferner die lineare Abbildung  $F_v := \text{pr}_v \circ D|_W : W \rightarrow W$ . Dann sind die Diagonaleinträge von  $\tilde{D}$  gerade die Eigenwerte von  $F_v$ , und die Basis  $\mathcal{B}_W$  besteht aus Eigenvektoren von  $F_v$ .

*Beweis.* Beachte zunächst die Tatsache, dass  $Q_\lambda^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle (D + \lambda \mathbf{1})x, x \rangle = 1\}$  ist, dies folgt direkt aus Satz 4.5. Betrachte nun den Fall  $\lambda = 0$ :

Da  $a_1, \dots, a_n > 0$  und  $v \neq 0$  folgt  $\langle D^{-1}v, v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{a_i} \neq 0$ , und somit  $0 \in \tilde{U}$ . Nach Satz

3.3 folgt sofort die Existenz einer invertierbaren Diagonalmatrix  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  sodass  $Q_0^* \cap W$  die geforderte Gestalt besitzt, und auch die geforderten Zusammenhänge von  $\tilde{D}$  und  $\mathcal{B}_W$  zur Abbildung  $F_v$ .

Ebenso folgt für jedes  $\lambda \in \tilde{U}$  mit demselben Satz 3.3 die Existenz einer Matrix  $\tilde{D}_\lambda$  sodass  $Q_\lambda^* \cap W = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i \mid \langle \tilde{D}_\lambda x, x \rangle = 1 \right\}$ . Es muss daher nur noch gezeigt werden, dass  $\tilde{D}_\lambda = \tilde{D} + \lambda \mathbf{1}$  gewählt werden kann.

Betrachte den Beweis dieses Satzes 3.3: Die einzige Forderung an die Matrix  $\tilde{D}_\lambda$  ist, dass sie Diagonalgestalt besitzt, und dass  $\left( \begin{array}{c|c} \tilde{D}_\lambda & * \\ * & * \end{array} \right)$  ähnlich zur Matrix  $(D + \lambda \mathbf{1})$  ist.

Im Fall  $\lambda = 0$  gilt also  $C^T D C = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{D} & * \\ * & * \end{array} \right)$  für ein  $C \in O(n, \mathbb{R})$ . Somit folgt für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dass

$$C^T (D + \lambda \mathbf{1}) C = C^T D C + \lambda \mathbf{1} = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{D} & * \\ * & * \end{array} \right) + \lambda \mathbf{1} = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{D} + \lambda \mathbf{1} & * \\ * & * \end{array} \right).$$

Somit kann wie gewünscht  $\tilde{D}_\lambda = \tilde{D} + \lambda \mathbf{1}$  gewählt werden.  $\square$

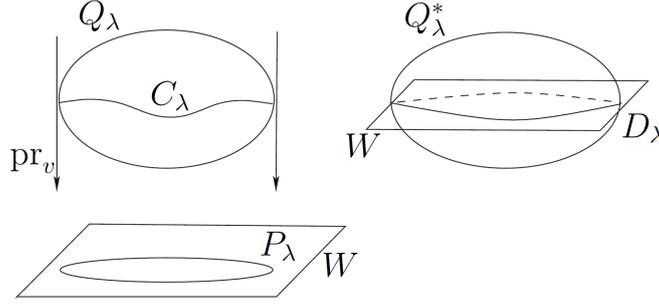


Abbildung 5: Dualität der Projektion und des Schnittes. Quelle: [6, Kapitel 4]

**Theorem 2.** Sei  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in U}$  mit  $U := \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$  eine konfokale Quadriken­schar zu den positiven Parametern  $a_1, \dots, a_n$ . Sei  $D := \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ . Sei außerdem die Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^{n-1}$  wie folgt definiert:

Für  $v \in S^{n-1}$  definiere  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$  und  $\text{pr}_v : \mathbb{R}^n \rightarrow W, x \mapsto x - \langle x, v \rangle \cdot v$  (die orthogonale Projektion auf  $W$ ). Definiere weiter  $F_v := \text{pr}_v \circ D|_W : W \rightarrow W$ . Dann gelte  $(s, v) \in \Omega$  genau dann, wenn  $F_v$  genau  $(n-1)$  verschiedene Eigenwerte besitzt, und für jeden Eigenvektor  $b$  von  $F_v$  die Bedingung  $\langle \text{pr}_v(s), b \rangle \neq 0$  erfüllt ist.

Dann gilt für jede Gerade  $g := s + \mathbb{R} \cdot v$  mit  $(s, v) \in \Omega$ : Sind  $m_1, \dots, m_{n-1}$  die Eigenwerte von  $F_v$ , so gibt eindeutige, voneinander verschiedene Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}$ , welche glatt mit  $(s, v) \in \Omega$  variieren, sodass gilt: Falls  $\lambda_i \in U$ , so liegt  $g$  tangential an  $Q_{\lambda_i}$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Sind dann  $\lambda_i, \lambda_j \in U$  mit  $i \neq j$ , so gilt für die Berührungspunkte  $x_i \in Q_{\lambda_i} \cap g$  und  $x_j \in Q_{\lambda_j} \cap g$  der Geraden  $g$  an den Quadriken  $Q_{\lambda_i}, Q_{\lambda_j}$  die Bedingung  $T_{x_i} Q_{\lambda_i} \perp T_{x_j} Q_{\lambda_j}$ .

Es gilt außerdem  $\langle (D + \lambda_i \mathbf{1})^{-1} v, v \rangle \neq 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$ .

**Bemerkung.** Die eben definierte Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^{n-1}$  ist offen (bezüglich der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^{n-1}$ ).

*Beweis.* Für  $\lambda \in U$  sei  $A_\lambda := (D + \lambda \mathbf{1})^{-1}$ , dann ist  $Q_\lambda = \{x \mid \langle A_\lambda x, x \rangle = 1\}$ .

Wähle ein festes  $(s, v) \in \Omega$  und  $\lambda \in U$ . Sei  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ , und sei  $\text{pr}_v$  wie oben definiert. Sei  $C_\lambda := \{x \in Q_\lambda \mid v \in T_x Q_\lambda\} \subseteq Q_\lambda$  die Menge der kritischen Punkte der Projektion  $\text{pr}_v$ . Sei  $P_\lambda := \text{pr}_v(C_\lambda) \subseteq W$ . Sei  $\delta_1 := \delta_{Q_\lambda}$  die Dualitätsabbildung von  $Q_\lambda$ . Sei  $D_\lambda := \delta_1(C_\lambda)$  (siehe Abb. 5).

Es gilt  $D_\lambda = Q_\lambda^* \cap W$  für alle  $\lambda \in U$ , denn:

$$\begin{aligned} p \in D_\lambda &= \delta_1(C_\lambda) \\ \iff p &= \delta_1(x) \wedge x \in Q_\lambda \wedge v \in T_x Q_\lambda \\ \iff p &= \delta_1(x) \wedge p \in Q_\lambda^* \wedge 0 = \langle v, A_\lambda x \rangle = \langle v, \delta_1(x) \rangle = \langle v, p \rangle \\ \iff p &\in Q_\lambda^* \wedge p \in W. \end{aligned}$$

Definiere nun  $\tilde{U} := \{\lambda \in U \mid \langle A_\lambda v, v \rangle \neq 0\}$ .

Schritt 1: Beweise für  $\lambda \in \tilde{U}$ , dass  $P_\lambda$  eine sternförmige Hyperfläche bezüglich  $W$  ist:

Sei  $\lambda \in \tilde{U}$ . Zeige zunächst, dass  $C_\lambda$  als Urbild eines regulären Wertes eine Mannigfaltigkeit ist: Sei  $x \in Q_\lambda$ . Da  $\delta_1(x) = A_\lambda x$  Normalenvektor von  $T_x Q_\lambda$  ist, gilt:  $x \in C_\lambda \iff 0 = \langle A_\lambda x, v \rangle = \langle A_\lambda v, x \rangle$ . Definiere  $f : Q_\lambda \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle A_\lambda v, x \rangle$ , dann ist also  $C_\lambda = f^{-1}(0)$ . Nun muss noch gezeigt werden, dass 0 ein regulärer Wert von  $f$  ist, dann folgt nach Satz 1.10, dass  $C_\lambda$  eine Mannigfaltigkeit ist.

Betrachte also für  $x \in C_\lambda$  die Ableitung  $Df(x) : T_x Q_\lambda \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle A_\lambda v, p \rangle$ . Die Abbildung ist linear, somit genau dann surjektiv, wenn im  $Df(x) \neq 0$ . Es gilt aber  $v \in T_x Q_\lambda$ , da  $x \in C_\lambda$  ist, und  $Df(x)(v) = \langle A_\lambda v, v \rangle \neq 0$ , denn  $\lambda \in \tilde{U}$ . Somit ist 0 ein regulärer Wert und  $C_\lambda$  eine  $(n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ferner gilt für  $x \in C_\lambda$  für den Tangentialraum  $T_x C_\lambda = \ker Df(x)$ , und somit  $v \notin T_x C_\lambda$ .

Nun ist  $P_\lambda = \text{pr}_v(C_\lambda) = \{y \in W \mid \text{Die Gerade } y + \mathbb{R}v \text{ liegt tangential an } Q_\lambda\}$  nach Konstruktion, somit folgt mit Lemma 4.7, dass  $P_\lambda$  eine  $(n-2)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $W$  ist.

Betrachte nun die Abbildung  $\pi : C_\lambda \rightarrow P_\lambda, x \mapsto \text{pr}_v(x)$ . Diese Abbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus:  $\pi$  ist glatt, da ihre Fortsetzung  $\text{pr}_v$  linear ist. Außerdem gilt für  $x \in C_\lambda$ , dass  $D\pi(x) : T_x C_\lambda \rightarrow T_{\pi(x)} P_\lambda$  ein Isomorphismus ist: Da  $\dim T_x C_\lambda = \dim T_{\pi(x)} P_\lambda = n-2$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $\ker D\pi(x) = 0$  ist. Sei also  $w \in \ker D\pi(x) \subseteq T_x C_\lambda$ . Es gilt:

$$0 = D\pi(x)(w) = D\text{pr}_v(x)(w) = \text{pr}_v(w) = w - \langle w, v \rangle \cdot v \implies w = \langle w, v \rangle \cdot v.$$

Da aber  $v \notin T_x C_\lambda$ , muss  $w = 0$  sein. Somit ist  $D\pi(x)$  ein Isomorphismus, und nach Satz 1.11 gilt:  $\pi$  ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Zeige nun, dass  $P_\lambda$  sternförmig ist, bestimme dazu zunächst die Tangentialräume von  $P_\lambda$ : Für  $x \in P_\lambda$  sei  $y \in C_\lambda$  mit  $\pi(y) = x$ . Dann ist  $T_x P_\lambda = T_y Q_\lambda \cap W$ . Dies sieht man so: Sei  $p \in T_x P_\lambda$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} p \in T_x P_\lambda &= D\pi(y)(T_y C_\lambda) = \text{pr}_v(T_y C_\lambda) \\ \implies \exists q \in T_y C_\lambda \subseteq T_y Q_\lambda \text{ sodass } \text{pr}_v(q) &= q - \langle q, v \rangle v = p. \end{aligned}$$

Da  $y \in C_\lambda$ , ist  $v \in T_y Q_\lambda$  nach Definition von  $C_\lambda$ . Somit ist  $p = q - \langle q, v \rangle v \in T_y Q_\lambda$ . Außerdem ist offensichtlich  $T_x P_\lambda \subseteq W$ , denn  $P_\lambda$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $W$ . Somit folgt insgesamt  $T_x P_\lambda \subseteq T_y Q_\lambda \cap W$ . Die Gleichheit folgt nun aus Dimensionsgründen: Da  $v \in T_y Q_\lambda$  und  $W = (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ , ist  $T_y Q_\lambda \cup W = \mathbb{R}^n$ , und somit

$$\begin{aligned} \dim T_y Q_\lambda \cap W &= \dim T_y Q_\lambda + \dim W - \dim \mathbb{R}^n \\ &= (n-1) + (n-1) - n = n-2 = \dim T_x P_\lambda. \end{aligned}$$

Somit folgt Gleichheit. Hieraus folgt auch direkt  $T_y Q_\lambda = T_x P_\lambda \oplus (\mathbb{R} \cdot v)$ .

Zu zeigen ist nun, dass  $x \notin T_x P_\lambda$ . Da  $v \in T_y Q_\lambda$ , gilt: Wäre nun  $x \in T_x P_\lambda \subseteq T_y Q_\lambda$ , so wäre auch  $y = \text{pr}_v(y) + \langle y, v \rangle v = x + \langle y, v \rangle v \in T_y Q_\lambda$ . Dies wäre aber ein Widerspruch, da  $Q_\lambda$  sternförmig ist. Somit ist  $P_\lambda$  sternförmig.

Schritt 2: Zeige für  $\lambda \in \tilde{U}$ , dass  $D_\lambda$  polar dual zu  $P_\lambda$  bezüglich des Unterraums  $W$  ist: Sei  $\lambda \in \tilde{U}$ . Definiere  $\delta_2 := \delta_{P_\lambda}$ , die Dualitätsabbildung von  $P_\lambda$  bezüglich  $W$ . Zeige nun, dass  $\delta_2(\pi(x)) = \delta_1(x)$  für alle  $x \in C_\lambda$ : Wähle ein festes  $x \in C_\lambda$ , und setze  $z := \delta_1(x)$ . Dann ist  $z$  der eindeutige Normalenvektor von  $T_x Q_\lambda$  mit  $\langle z, x \rangle = 1$ . Zu zeigen ist, dass  $z \in W$ , dass  $z$  Normalenvektor von  $T_{\pi(x)} P_\lambda$  ist, und dass  $\langle z, \pi(x) \rangle = 1$ , dann gilt nämlich  $z = \delta_2(\pi(x))$ .

Da  $x \in C_\lambda$ , ist  $v \in T_x Q_\lambda$ , somit ist  $\langle z, v \rangle = 0$ , d.h.  $z \in W$ . Außerdem wurde bei der Berechnung der Tangentialräume von  $P_\lambda$  gezeigt, dass  $T_{\pi(x)} P_\lambda = T_x Q_\lambda \cap W \subseteq T_x Q_\lambda$ , somit folgt direkt, dass  $z$  Normalenvektor dieses Unterraums ist. Weiter gilt:  $\pi(x) = x - \langle x, v \rangle v$ , somit ist  $\langle z, \pi(x) \rangle = \langle z, x \rangle - \underbrace{\langle x, v \rangle \langle z, v \rangle}_{=0} = \langle z, x \rangle = 1$ .

Somit ist  $\delta_2(\pi(x)) = \delta_1(x)$  für alle  $x \in C_\lambda$  gezeigt, und es folgt

$$P_\lambda^* = \delta_2(P_\lambda) = \delta_2 \circ \text{pr}_v(C_\lambda) = \delta_2 \circ \pi(C_\lambda) = \delta_1(C_\lambda) = D_\lambda.$$

Außerdem ist nach Lemma 1.4 die Dualitätsabbildung  $\delta_2 = \delta_{P_\lambda}$  ein lokaler Diffeomorphismus, denn  $\delta_1$  und  $\pi$  sind lokale Diffeomorphismen. Es gilt daher auch  $P_\lambda = (P_\lambda^*)^* = D_\lambda^*$ . **Schritt 3:** Bestimme  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}$ , welche die geforderten Eigenschaften erfüllen.

Sei  $\lambda \in \tilde{U}$ . Oben wurde  $D_\lambda = Q_\lambda^* \cap W$  gezeigt. Nach Lemma 4.8 gibt es daher eine geeignete Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_W = (b_1, \dots, b_{n-1})$  von  $W$  und eine Diagonalmatrix  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  sodass

$$D_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i \in W \mid \langle (M + \lambda \mathbf{1})x, x \rangle = 1 \right\},$$

dabei sind  $m_1, \dots, m_{n-1}$ , die Eigenwerte von  $F_v$ , und die Basisvektoren  $b_1, \dots, b_{n-1}$  die zugehörigen Eigenvektoren. Wegen  $(s, v) \in \Omega$  gilt zudem, dass die Werte  $m_1, \dots, m_{n-1}$  paarweise verschieden sind. Nach Satz 4.5 folgt außerdem

$$P_\lambda = D_\lambda^* = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i \in W \mid \langle (M + \lambda \mathbf{1})^{-1}x, x \rangle = 1 \right\}$$

für alle  $\lambda \in \tilde{U} \cap \mathbb{R} \setminus \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}$ . Somit beschreibt  $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \tilde{U} \cap \mathbb{R} \setminus \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}}$  eine konfokale Quadriken­schar in  $W$ .

Sei nun  $s_{\text{pr}} := \text{pr}_v(s)$  die Projektion des Stützvektors der Geraden  $g$ . Nach Konstruktion ist  $g = \text{pr}_v^{-1}(s_{\text{pr}})$ . Sei  $s_{\text{pr}} = \sum_{i=1}^{n-1} y_i b_i$  die Darstellung bezüglich der Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_W$ . Somit ist  $y_i = \langle s_{\text{pr}}, b_i \rangle \neq 0$  nach Voraussetzung, d.h.  $y := (y_1, \dots, y_{n-1})^T \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{n-1}$ . Nach Theorem 1 existieren nun genau  $(n-1)$  verschiedene Werte  $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}$ , sodass  $s_{\text{pr}} \in P_{\lambda_i}$ , für  $i = 1, \dots, n-1$ . Außerdem gilt  $T_{s_{\text{pr}}}P_{\lambda_i} \perp T_{s_{\text{pr}}}P_{\lambda_j}$ .

Betrachte nun ein  $\lambda_i$ . Falls  $\lambda_i \in \tilde{U}$ , gilt:  $P_\lambda = \text{pr}_v(C_\lambda)$ , d.h. es gibt ein  $x_i \in C_{\lambda_i}$  sodass  $\text{pr}_v(x_i) = \pi(x_i) = s_{\text{pr}}$ . Somit liegt  $g$  im Punkt  $x_i$  tangential an  $Q_{\lambda_i}$ , und es gilt:  $T_{x_i}Q_{\lambda_i} = T_{s_{\text{pr}}}P_{\lambda_i} \oplus (\mathbb{R} \cdot v)$ . Somit folgt aus  $T_{s_{\text{pr}}}P_{\lambda_i} \perp T_{s_{\text{pr}}}P_{\lambda_j}$  die geforderte Eigenschaft  $T_{x_i}Q_{\lambda_i} \perp T_{x_j}Q_{\lambda_j}$ .

Der Fall  $\lambda_i \in U \setminus \tilde{U}$  kann nun nicht eintreten, dies sieht man wie folgt: Sei  $\lambda \in U \setminus \tilde{U}$ . Per Definition der Matrix  $M$  gibt es ein  $S \in O(n, \mathbb{R})$  sodass  $S^T D S = \left( \begin{array}{c|c} M & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$ , und  $v = S \cdot e_n$ , d.h.  $v$  entspricht der letzten Spalte von  $S$ . (Siehe hierzu den Beweis von Satz 4.8 und Satz 3.3). Es gilt nun

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda v, v \rangle &= \langle A_\lambda S e_n, S e_n \rangle = \langle S^T A_\lambda S e_n, e_n \rangle = \langle S^{-1} A_\lambda S e_n, e_n \rangle \\ &= \langle S^{-1} (D + \lambda \mathbf{1})^{-1} S e_n, e_n \rangle = \left\langle (S^{-1} (D + \lambda \mathbf{1}) S)^{-1} e_n, e_n \right\rangle \\ &= \left\langle (S^T D S + \lambda \mathbf{1})^{-1} e_n, e_n \right\rangle. \end{aligned}$$

Wegen  $\lambda \notin \tilde{U}$  ist  $0 = \langle A_\lambda v, v \rangle = \left\langle (S^T D S + \lambda \mathbf{1})^{-1} e_n, e_n \right\rangle$ . Da

$$S^T D S + \lambda \mathbf{1} = \left( \begin{array}{c|c} M + \lambda \mathbf{1} & * \\ \hline * & * \end{array} \right),$$

ist dies nach Satz 3.1 äquivalent dazu, dass  $(M + \lambda \mathbf{1}) = \text{diag}(m_1 + \lambda, \dots, m_{n-1} + \lambda)$  nicht invertierbar ist. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn  $\lambda \in \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}$  ist. Es gilt aber  $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{-m_1, \dots, -m_{n-1}\}$ , somit muss

$$\langle (D + \lambda_i \mathbf{1})^{-1} v, v \rangle = \langle A_{\lambda_i} v, v \rangle \neq 0$$

sein. Es gilt daher  $\lambda_i \in U \implies \lambda_i \in \tilde{U}$  für  $i = 1, \dots, n-1$ .

Der Fall  $\lambda_i \notin U$  ist auch möglich, siehe Beispiel 4.9.

Nun zur glatten Abhängigkeit der Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ : Zunächst folgt aus Satz 3.8, dass die Eigenwerte von  $F_v$ , welche die Diagonaleinträge von  $M$  sind, glatt von  $v$  abhängen. Außerdem hängt  $s_{\text{pr}} = \text{pr}_v(s)$  glatt von  $s$  ab, da  $\text{pr}_v$  eine lineare Abbildung ist. Nach Theorem 1 hängen die Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  glatt von  $s_{\text{pr}}$  und den Diagonaleinträgen von  $M$  ab. Somit variieren diese letztlich glatt mit  $(s, v) \in \Omega$ .  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass in der Situation und mit den Bezeichnungen von Theorem 2 der Fall  $\lambda_i \notin U$  eintreten kann.

**Beispiel 4.9.** Sei  $\{Q_\lambda\}$  die konfokale Quadrikenchar im  $\mathbb{R}^3$  zu den Parametern 2, 1, 11, und sei  $s = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \sqrt{5}\right)^T$  und  $v = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T$ . Dann ist  $(s, v) \in \Omega$ , denn  $|v| = 1$ , und sei  $D := \text{diag}(2, 1, 11)$ ,  $b_1 := \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$  und  $b_2 := (1, 0, 0)^T$ , dann ist  $\{b_1, b_2\}$  eine Orthonormalbasis von  $W := (\mathbb{R} \cdot v)^\perp$ , und mit  $B := (b_1, b_2, v) \in \text{O}(3, \mathbb{R})$  gilt:

$$B^T D B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit hat nach Satz 3.3 die Abbildung  $F_v := \text{pr}_v \circ D|_W$  die Eigenwerte  $m_1 = 9$  und  $m_2 = 2$ , d.h. zwei verschiedene Eigenwerte, und es gilt:  $\text{pr}_v(s) = 2b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}b_2$ . Da  $b_1$  und  $b_2$  jeweils die Eigenräume von  $F_v$  erzeugen, ist die Bedingung  $\langle \text{pr}_v(s), b \rangle \neq 0$  für jeden Eigenvektor  $b$  erfüllt.

Bestimme nun analog zum Beweis von Theorem 2 die eindeutigen Werte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -9\}$ . Da  $\text{pr}_v(s) = 2b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}b_2$ , sind gerade diejenigen Werte von  $\lambda$  gesucht, welche die Gleichung

$$\frac{2^2}{9 + \lambda} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2 + \lambda} = 1$$

erfüllen. Dies ist für  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = -5, 5$  erfüllt. Nun ist aber  $\lambda_1 \notin U = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -11\}$ .

## 5 Geodäten auf einem Ellipsoiden

Im Folgenden wird der Begriff einer Geodäte definiert. Mithilfe des Theorems 2 kann dann das nächste Theorem formuliert werden, was sich auf die Tangenten von Geodäten eines Ellipsoiden bezieht.

Die folgenden Definitionen sind aus [5, Kapitel 2] entnommen.

**Definition 5.1.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit, sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, und  $\gamma : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Ein Vektorfeld entlang von  $\gamma$  (bezüglich  $M$ ) ist eine glatte Abbildung  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sodass  $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$  für alle  $t \in I$  gilt. Die Menge aller Vektorfelder entlang von  $\gamma$  wird mit  $\text{Vect}(\gamma)$  bezeichnet.

Ein spezielles Vektorfeld entlang einer Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  ist durch ihre Ableitung gegeben, d.h.  $\dot{\gamma}(t) \in \text{Vect}(\gamma)$ . Dieses wird bei der Definition der Geodäten wichtig.

**Definition und Satz 5.2.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine eindeutig definierte, glatte Abbildung  $\Pi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  sodass für jedes  $p \in M$  die Matrix  $\Pi(p)$  symmetrisch ist und die orthogonale Projektion von  $\mathbb{R}^n$  auf  $T_pM$  beschreibt, d.h.  $\Pi(p) = \Pi(p)^T$ , und für jedes  $v \in T_pM, w \in (T_pM)^\perp$  gilt:  $\Pi(p) \cdot (v + w) = v$ .

*Beweis.* Siehe Abschnitt 2.2.1 von [5]. □

**Definition 5.3** (Kovariante Ableitung). Die kovariante Ableitung  $\nabla_\gamma : \text{Vect}(\gamma) \rightarrow \text{Vect}(\gamma)$  ist durch

$$\nabla_\gamma X(t) := \Pi(\gamma(t))X'(t) \in T_{\gamma(t)}M$$

gegeben.

**Definition 5.4** (Geodäte). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit, sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein nichtleeres, offenes Intervall, und  $\gamma : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Dann wird  $\gamma$  als Geodäte bezeichnet, falls  $\nabla_\gamma \dot{\gamma}(t) = 0$  für alle  $t \in I$ .

Aus der Bedingung  $\nabla_\gamma \dot{\gamma} \equiv 0$  für Geodäten ergibt sich eine Aussage über dessen zweite Ableitung:

**Korollar 5.5.** Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodäte auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gilt  $\ddot{\gamma}(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$ .

*Beweis.* Aus  $\nabla_\gamma \dot{\gamma}(t) = \Pi(\gamma(t))\ddot{\gamma}(t) = 0$  folgt, dass  $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ , denn  $\Pi(\gamma(t))$  ist die orthogonale Projektion auf diesen Tangentialraum. □

Der folgende Satz besagt, dass es zu jedem Anfangspunkt und jeder Anfangsrichtung auf einer Mannigfaltigkeit eine eindeutige Geodäte gibt.

**Satz 5.6** (Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten). Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit, wähle ein  $p \in M$  und  $v \in T_pM$ . Dann existiert eine eindeutige Geodäte  $\gamma : I \rightarrow M$  sodass  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ , und das offene Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  maximal ist, d.h. für jede andere Geodäte  $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow M$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = p, \dot{\tilde{\gamma}}(0) = v$  gilt:  $\tilde{I} \subseteq I$  und  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$  für alle  $t \in \tilde{I}$ .

*Beweis.* Siehe [5], Korollar 2.22. □

Geodäten sind Kurven auf einer Mannigfaltigkeit, die lokal den Abstand minimieren. Dieser Sachverhalt wird auch in [5, Kapitel 2] formuliert, hierzu wird zunächst der Begriff des Abstandes auf einer Mannigfaltigkeit eingeführt: Diese wird für zwei Punkte auf der Mannigfaltigkeit als die kürzeste Länge definiert, welche eine Kurve auf der Mannigfaltigkeit hat, die diese beiden Punkte verbindet.

**Definition 5.7** (Länge einer Kurve). *Sei  $N \subseteq \mathbb{R}^n$ , sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes Intervall. Für eine glatte Kurve  $\gamma : I \rightarrow N$  bezeichne mit*

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt$$

die Länge der Kurve  $\gamma$ .

**Definition und Satz 5.8** (Intrinsische Metrik auf einer Mannigfaltigkeit). *Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Mannigfaltigkeit. Für  $p, q \in M$  sei*

$$\Omega_{p,q} := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid \gamma \text{ ist glatt, und } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \neq \emptyset.$$

Definiere folgenden Abstand auf  $M$ :

$$d : M \times M \rightarrow [0; \infty), (p, q) \mapsto \inf_{\gamma \in \Omega_{p,q}} L(\gamma).$$

Dann ist  $d$  eine Metrik auf  $M$ .

*Beweis.* Siehe [5], Lemma 2.4. □

**Satz 5.9.** *Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodäte auf einer Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es zu jedem  $t \in I$  ein  $\varepsilon > 0$  sodass für alle  $t_1, t_2 \in (t - \varepsilon; t + \varepsilon)$  gilt:*

$$L(\gamma|_{[t_1; t_2]}) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)).$$

Für den Beweis des nächsten Theorems wird noch ein Lemma benötigt.

**Lemma 5.10.** *Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle, und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $x \in J$ , und es gelte  $f'(t) = 0$  für alle  $t \in f^{-1}(J \setminus \{x\})$ . Dann gilt schon  $f'(t) = 0$  für alle  $t \in f^{-1}(J)$ .*

*Beweis.* Sei  $t \in f^{-1}(x)$ , zu zeigen ist  $f'(t) = 0$ . Angenommen,  $\eta := f'(t) \neq 0$ , sei oBdA  $\eta > 0$ . Da  $f$  und  $f'$  stetig sind, existiert ein  $\delta > 0$  sodass  $\tilde{I} := (t - \delta, t + \delta) \subseteq I$ , und für alle  $s \in \tilde{I}$  gilt:  $f(s) \in J$  und  $f'(s) \in (\frac{\eta}{2}, \frac{3\eta}{2})$ . Definiere nun  $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$ . Dann ist  $[t, t + \varepsilon] \subset \tilde{I}$ , und es gilt:

$$\begin{aligned} f(t + \varepsilon) &= f(t) + \int_t^{t+\varepsilon} f'(t) dt = x + \int_t^{t+\varepsilon} f'(t) dt \\ \implies x + \varepsilon \cdot \frac{\eta}{2} &< f(t + \varepsilon) < x + \varepsilon \cdot \frac{3\eta}{2} \\ \implies f(t + \varepsilon) &\neq x. \end{aligned}$$

Wegen  $t + \varepsilon \in \tilde{I}$  folgt aber auch  $f(t + \varepsilon) \in J \setminus \{x\}$  und  $f'(t + \varepsilon) \in (\frac{\eta}{2}, \frac{3\eta}{2})$ , also insbesondere  $f'(t + \varepsilon) \neq 0$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Daher muss  $f'(t) = 0$  sein. □

Nun kann das nächste Theorem formuliert werden: Für eine konfokale Quadriken­schar  $\{Q_\lambda\}$  wird die Aussage des Theorems 2 auf die Tangenten der Geodäten auf dem Ellipsoiden  $E := Q_0$  bezogen, und dort gezeigt, dass die Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ , die das Theorem 2 liefert, sich entlang der Geodäten nicht ändern.

**Theorem 3.** Sei  $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in U}$  mit  $U := \mathbb{R} \setminus \{-a_1, \dots, -a_n\}$  eine konfokale Quadriken­schar zu positiven Parametern  $a_1, \dots, a_n$ . Sei die offene Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^{n-1}$  wie in Theorem 2 definiert. Sei  $\gamma : I \rightarrow E$  eine Geodäte auf dem Ellipsoiden  $E := Q_0$ , wobei  $0 \in I$  gelte, und so gewählt sei, dass  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in \Omega$  für alle  $t \in I$ . Für  $t \in I$  sei  $g_t := \gamma(t) + \mathbb{R} \cdot \dot{\gamma}(t)$ . Dann existieren eindeutige, voneinander verschiedene Werte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ , sodass gilt: Falls  $\lambda_i \in U$ , so liegt  $g_t$  tangential an  $Q_{\lambda_i}$ , für  $i = 1, \dots, n-2$ .

*Beweis.* Sei  $t \in I$ . Wähle nach Theorem 2 die eindeutigen Werte  $\mu_0(t), \dots, \mu_{n-2}(t)$ , sodass  $g_t$  tangential an  $Q_{\mu_i(t)}$  liegt, falls  $\mu_i(t) \in U$ . Da  $g_t$  immer tangential an  $E = Q_0$  liegt, und  $0 \in U$ , setze oBdA  $\mu_0(t) = 0 \in U$ .

Wähle zunächst ein festes  $i \in \{1, \dots, n-2\}$ . Zu zeigen ist nun, dass die Funktion  $\mu_i : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \mu_i(t)$  konstant ist. Dann gilt:  $\mu_i(t)$  hängt nach Theorem 2 glatt von  $\gamma(t)$  und  $\dot{\gamma}(t)$  ab. Da diese wiederum glatte Funktionen in  $t$  sind, ist somit  $\mu_i$  als Funktion in  $t$  glatt.

Definiere  $I_i := \mu_i^{-1}(U)$ , und sei  $t \in I_i$ . Der Berührungspunkt von  $g_t$  mit der Quadrik  $Q_{\mu_i(t)}$  sei durch  $x_i(t)$  gegeben. Dieser ist eindeutig definiert:

Sei  $A_i(t) := \text{diag}\left(\frac{1}{a_1 + \mu_i(t)}, \dots, \frac{1}{a_n + \mu_i(t)}\right)$ . Betrachte folgende quadratische Gleichung in der Variablen  $s$ :

$$\langle A_i(t) \cdot (\gamma(t) + s \cdot \dot{\gamma}(t)), \gamma(t) + s \cdot \dot{\gamma}(t) \rangle - 1 = 0.$$

Wie im Beweis von Theorem 2 gezeigt, folgt aus  $\mu_i(t) \in U$ , dass  $\langle A_i(t) \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle \neq 0$ . Somit verschwindet der Vorfaktor von  $s^2$  nicht, die Gleichung ist daher echt quadratisch. Aus den Nullstellen ergeben sich gerade die Schnittpunkte von  $g_t$  mit  $Q_{\mu_i(t)}$ . Da die Gerade aber die Quadrik tangential berührt, hat die Gleichung eine doppelte Nullstelle in  $s$ , d.h. die Diskriminante der Gleichung verschwindet. Somit ergibt sich für den Berührungspunkt  $x_i(t)$  folgende Beziehung:

$$x_i(t) = \gamma(t) + s_i(t) \cdot \dot{\gamma}(t) \text{ mit } s_i(t) = -\frac{\langle A_i(t) \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\langle A_i(t) \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}.$$

Somit sind  $x_i$  und  $s_i$  glatte Funktionen in  $t$  auf  $I_i$ . Außerdem ist

$$x_i'(t) = \dot{\gamma}(t) + s_i'(t) \cdot \dot{\gamma}(t) + s_i(t) \cdot \ddot{\gamma}(t).$$

Nun ist  $\gamma$  eine Geodäte auf  $E$ , sodass nach Korollar 5.5 gilt:  $\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}E$ . Theorem 2 liefert folgende Orthogonalitätsbedingung für die Tangentialräume:

$$T_{x_i(t)}Q_{\mu_i(t)} \perp T_{\gamma(t)}E.$$

Somit folgt  $\ddot{\gamma}(t) \in T_{x_i(t)}Q_{\mu_i(t)}$ . Außerdem gilt per Definition des Tangentialraumes, dass  $\dot{\gamma}(t) \in T_{x_i(t)}Q_{\mu_i(t)}$ . Es folgt daher  $x_i'(t) \in T_{x_i(t)}Q_{\mu_i(t)}$ . Nun ist  $A_i(t)x_i(t)$  gerade der Normalenvektor von  $T_{x_i(t)}Q_{\mu_i(t)}$ , somit folgt  $\langle A_i(t)x_i(t), x_i'(t) \rangle = 0$ .

Wegen  $x_i(t) \in Q_{\mu_i(t)}$  ergibt sich

$$x_i(t) \in Q_{\mu_i(t)} \implies \langle A_i(t)x_i(t), x_i(t) \rangle = 1 \implies \frac{d}{dt} \langle A_i(t)x_i(t), x_i(t) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \implies \langle A'_i(t)x_i(t), x_i(t) \rangle + 2 \underbrace{\langle A_i(t)x_i(t), x'_i(t) \rangle}_{=0} &= 0 \\ \implies \langle A'_i(t)x_i(t), x_i(t) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Mit

$$A'_i(t) = \text{diag} \left( -\frac{\mu'_i(t)}{(a_1 + \mu_i(t))^2}, \dots, -\frac{\mu'_i(t)}{(a_n + \mu_i(t))^2} \right)$$

ergibt sich weiter

$$0 = \langle A'_i(t)x_i(t), x_i(t) \rangle = \sum_{k=1}^n -\frac{\mu'_i(t)x_i(t)_k^2}{(a_k + \mu_i(t))^2} = -\mu'_i(t) \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n \frac{x_i(t)_k^2}{(a_k + \mu_i(t))^2} \right)}_{>0}.$$

Somit ist  $\mu'_i(t) = 0$  für alle  $t \in I_i$ . Mit Lemma 5.10 folgt nun, dass  $\mu'_i(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . Da  $I$  zusammenhängend ist, ist die Funktion  $\mu_i$  konstant auf  $I$ . Mit  $\lambda_i := \mu_i(0) = \mu_i(t)$  für alle  $t \in I$  folgt die zu zeigende Aussage.  $\square$

## Literatur

- [1] BOSCH, SIEGFRIED: *Lineare Algebra*. Springer-Verlag, 5 Auflage, 2014.
- [2] FORSTER, OTTO: *Analysis 2*. Vieweg+Teubner Verlag, 9 Auflage, 2011.
- [3] FORSTER, OTTO: *Analysis 1*. Springer Spektrum, 12 Auflage, 2016.
- [4] HWANG, SUK-GEUN: *Cauchy's Interlace Theorem for Eigenvalues of Hermitian Matrices*. The American Mathematical Monthly, February 2004. Online erhältlich unter <http://matrix.skku.ac.kr/Series-E/Monthly-E.pdf>.
- [5] ROBBIN, JOEL W. und DIETMAR A. SALAMON: *Introduction to Differential Geometry*. Online erhältlich unter <https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/diffgeo.pdf>, 2013.
- [6] TABACHNIKOV, SERGE: *Billiards inside Conics and Quadrics*. In: *Geometry and Billiards*, Kapitel 4. American Mathematical Society, 2005. Online erhältlich unter <https://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf>.